
Kurt Gödel
OBRAS COMPLETAS
Edición de Jesús Mosterín
Alianza Editorial

OBRAS COMPLETAS

Kurt Gödel

OBRAS COMPLETAS

Introducción y traducción
de Jesús Mosterín

Alianza Editorial

Primera edición en «Alianza Universidad»: 1981
Primera edición en «Ensayo»: 2006
Primera reimpresión: 2006

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15; 28027 Madrid; télef. 91 393 88 88
www.alianzaeditorial.es
ISBN: 84-206-4773-X
Depósito legal: M. 36.733-2006
Compuesto e impreso por Fernández Ciudad, S. L.
Coto de Doñana, 10. 28320 Pinto (Madrid)
Printed in Spain

INDICE

PROLOGO A LA SEGUNDA EDICION

La primera edición de este libro, publicada en 1981, fue la primera (y, hasta hace pocos años, la única) edición de las obras completas de Kurt Gödel existente en cualquier idioma.

Realmente es poco usual –y nada fácil– la edición de unas obras completas traducidas en ausencia de una edición de los textos originales completos. Mientras tanto, esa laguna se ha colmado. John Dawson, Jr. ha establecido la bibliografía completa publicada de Gödel e incluso ha catalogado sus manuscritos inéditos, depositados ahora en la biblioteca Firestone de la Universidad de Princeton. En 1986 ha aparecido el primer volumen de Kurt Gödel: *Collected Works*, que reúne los textos originales alemanes e ingleses de Gödel, editados por un equipo presidido por Salomon Feferman. Esa edición completa de los textos originales de Gödel –auspiciada por la Asociación de Lógica Simbólica– está llamada a ser la referencia obligada para todos los estudios futuros sobre el gran lógico. Para facilitar el trabajo al lector interesado en compulsar las traducciones aquí presentadas con los textos originales, y para unificar internacionalmente las referencias a Gödel, me he decidido a cambiar el sistema de referencias y la ordenación de la primera edición de este libro en aquellos puntos en que no coincidían con los correspondientes de *Collected Works*. Ahora, en esta segunda edición, referencias y ordenación coinciden.

Ya en febrero de 1982 me escribió John W. Dawson, Jr., comunicándome que había encontrado unos artículos geométricos de Gödel que habían escapado a la atención general y que aparecerían en las *Collected Works*. Estos y otros breves escritos de Gödel, que faltaban en la primera edición, se incorporan ahora a esta segunda edición, que así de verdad pasa a merecer su nombre de *Obras completas*. En concreto, se han añadido los trabajos de Gödel [1930a], [1933], [1933b], [1933c], [1933d], [1933h], [1936], [1962], [1972] y [1972a]. [1964] ha cambiado de sitio, separándose de [1947]. Este libro contiene ahora todas las obras efectivamente publicadas por Gödel, aunque no recoge las breves recensiones por él escritas en los años 1932-36 (con la sola excepción de [1934c]), ni tampoco la correspondencia (aún inédita en su mayor parte), ni menos aún las notas inéditas depositadas en Princeton, que tardarán todavía varios años en ser publicadas.

Ni que decir tiene que, además, se han corregido los errores, erratas y descuidos detectados en la edición anterior, tarea en la que he contado de nuevo con la eficaz ayuda de Enrique Casanovas, que además ha traducido [1962], [1972] y [1972a]. Por ello deseo manifestarle mi agradecimiento.

Por otro lado, la bibliografía ha sido ampliada para abarcar las nuevas referencias de Gödel y los estudios recientes sobre su obra.

Espero que, con los mencionados cambios y ampliaciones, esta segunda edición de las *Obras completas* del más grande lógico de nuestro siglo sea un instrumento definitivo para el conocimiento de Gödel en España y en América Latina. Quien desee profundizar más, puede acudir a los textos en su lengua original en *Collected Works*. En cualquier caso, ha sido pensando en prestar un servicio al lector, al estudiante y al investigador de lengua española que hemos asumido el trabajo y el costo de esta nueva edición.

Barcelona, junio de 1988.

JESÚS MOSTERÍN.

PROLOGO A LA PRIMERA EDICION

Gödel ha sido sin duda el más grande lógico del siglo XX y uno de los más grandes pensadores de todos los tiempos. En 1930 probó la suficiencia del cálculo lógico de primer orden. En 1931 probó que todo sistema formal que contenga un poco de aritmética es necesariamente incompleto y que es imposible probar su consistencia con sus propios medios. En 1938-1939 probó la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis del continuo respecto de los demás axiomas de la teoría de conjuntos. Estos tres resultados han sido de una importancia excepcional y han proporcionado a Gödel una fama casi mítica entre lógicos, matemáticos y filósofos. Además, Gödel hizo importantes contribuciones al estudio del problema de la decisión, definió por primera vez las funciones recursivas, probó la consistencia relativa de la lógica y la artimética clásica respecto a la intuicionista, revolucionó la filosofía de la matemática (mostrando indirecta pero indudablemente la insatisfactoriedad de las tradicionales posiciones del logicismo, intuicionismo y formalismo) e introdujo nuevos y potentes métodos formales, desde la aritmetización de la matemática mediante lo que hoy llamamos la «gödelización», en 1931, hasta los funcionales computables de tipo finito, en 1958. Todavía le quedó tiempo para ocuparse creativamente de cosmología relativista y encon-

trar soluciones sorprendentes a las ecuaciones del campo gravitatorio de la relatividad general, que determinan universos rotatorios y fascinantes, en que el tiempo pierde su sentido habitual.

Descendiente de una familia de pequeños empresarios textiles alemanes y austríacos, que se habían abierto camino por su propio esfuerzo, Kurt Gödel nació el 28 de abril de 1906 en la ciudad de Brünn, en Moravia, al norte de Viena, entonces parte del Imperio austríaco (y ahora parte de Checoslovaquia, con el nombre de Brno). Desde pequeño fue delicado de salud y fácilmente depresivo. Estudió matemáticas en la Universidad de Viena, en la que se doctoró (su tesis doctoral fue su famosa prueba de la suficiencia semántica del cálculo lógico de primer orden) en 1930 con H. Hahn, un notable matemático y miembro del Círculo de Viena, en cuyas actividades Gödel participaba, especialmente en las sesiones del Coloquio Matemático que dirigía Karl Menger. Desde 1933 a 1939 fue Gödel *Privatdozent* (con derecho a dar clases, pero no a cobrar sueldo) en la Universidad de Viena. Durante los cursos académicos 1933-34 y 1938-39 estuvo como invitado en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (U.S.A.). En la primera de dichas estancias expuso sus famosos resultados sobre la incompletud de los sistemas formales que incorporan la aritmética recursiva primitiva, en la segunda expuso su prueba de la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis del continuo en teoría de conjuntos. El ambiente en Viena se había ido enrareciendo. En 1936 M. Schlick, el fundador del Círculo de Viena, había sido asesinado durante una conferencia. Gödel mismo, que siempre había evitado toda toma de posición política, tuvo problemas e incluso se llegó a pensar que era judío. Finalmente a finales de 1939, temiendo ser alistado en el ejército nazi, huyó de Viena a Estados Unidos, atravesando Rusia en el ferrocarril transiberiano. El Instituto de Estudios Avanzados de Princeton reunía por entonces a lo más granado de los científicos europeos –Einstein, Weyl, von Neumann...–, que habían tenido que huir de la pesadilla hitleriana. Con ellos pasó también definitivamente la vanguardia de la ciencia mundial de Alemania a Estados Unidos. Allí, en Princeton, se quedaría Gödel el resto de su vida, desde 1940 hasta 1946 como miembro ordinario del Instituto de

Estudios Avanzados, de 1946 a 1953 como miembro permanente y de 1953 hasta su muerte como profesor titular. En 1948 Gödel adquirió la nacionalidad norteamericana. En 1951 recibió el primer premio Einstein. En 1955 fue elegido miembro de la Academia Nacional de Ciencias. Entre 1940 y 1955 Gödel trabajó intensamente, desplegando una gran actividad investigadora en lógica, en filosofía de la matemática y en teoría general de la relatividad, por la que había llegado a interesarse profundamente en sus frecuentes contactos con su vecino Einstein. A partir de 1955 le llovieron los premios y honores científicos, pero su creatividad fue decayendo poco a poco, sobre todo debido a sus problemas de salud y a sus frecuentes depresiones. A pesar de todo siempre conservó una mente lúcida y un interés vivo y activo por los nuevos desarrollos de la lógica y la matemática. Gödel murió el 14 de enero de 1978 en Princeton.

Un buen y breve resumen de las aportaciones más importantes de Gödel se halla en Kleene [1976]. Más información sobre la vida de Gödel, así como una interesante discusión de su obra y su filosofía, pueden encontrarse en Kreisel [1980].

Al morir, Gödel ha dejado una enorme cantidad de papeles inéditos, que van desde notas de lecturas y borradores de trabajos técnicos hasta un cuidado manuscrito sobre la filosofía del tiempo en Kant. Pero pasarán muchos años antes de que esos papeles inéditos (en gran parte escritos en un sistema de taquigrafía hace tiempo caído en desuso) puedan ser descifrados y dados a la luz.

Los escritos publicados de Gödel son de una concisión legendaria, de una incomparable densidad intelectual. Su tesis doctoral cabía en 11 páginas –Gödel [1930]–. Y la obra más revolucionaria de la lógica del siglo XX –Gödel [1931]– ocupaba 25. Por eso no es de extrañar que la totalidad de esos escritos quepa en un solo volumen. Sin embargo sus artículos y trabajos, redactados en alemán y en inglés, no siempre resultan fáciles de consultar, pues se encuentran desperdigados por una serie heteróclita de publicaciones, actas y revistas de varios países, a veces bastante difíciles de encontrar. Por eso me ha parecido conveniente recogerlos aquí en un solo libro, por primera vez.

Al reunir los artículos de Gödel salta a la vista el hecho de que con frecuencia fue cambiando de signos y de terminología.

Además, como en casi todos sus artículos explora terreno nuevo, a veces emplea los términos en un sentido que luego éstos han perdido en la bibliografía subsiguiente, ya más estabilizada. Así, lo que Gödel llama al principio «recursivo», luego ha sido llamado «recursivo primitivo» y esa es la expresión que el mismo Gödel adopta en sus últimos artículos. Al traducir estos escritos hubiera resultado lo más cómodo dejar los signos y la terminología tal y como Gödel los empleó. Pero eso dificultaría extraordinariamente la lectura de los mismos, ya de por sí bastante difíciles. Por eso me he decidido a traducir no sólo la lengua ordinaria, sino también los signos lógicos y la terminología, unificándolos conforme a los usos actuales. Quien tenga un interés digamos filológico por los textos tendrá que acudir en todo caso al original. Precisamente la unificación y actualización de los signos lógicos y la terminología nos ha permitido combinar una completa fidelidad en la traducción con una comprensibilidad relativamente fácil de los textos.

Los signos lógicos empleados son los cinco conectores $\neg$ (no), $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\rightarrow$ (si..., entonces...) y $\leftrightarrow$ (si y sólo si) y los dos cuantificadores $\forall$ (para cada) y $\exists$ (hay un ... tal que...). Las letras griegas minúsculas α, β, φ... se refieren a fórmulas cualesquiera (o a números ordinales). Las fórmulas en que sólo aparecen variables sentenciales y conectores se llaman fórmulas conectivas y son estudiadas por la lógica conectiva. La lógica cuantificacional trata de las fórmulas en que aparecen cuantificadores. Si todas las variables cuantificadas se refieren a individuos, tenemos la lógica de primer orden. Una fórmula sin variables libres es una sentencia. Una fórmula es satisfecha o no por una interpretación, según que esa fórmula, así interpretada, exprese una idea verdadera o una falsa. Una fórmula satisfecha por todas sus posibles interpretaciones es una fórmula válida. Y un cálculo que sirve para deducir todas las sentencias válidas es un cálculo suficiente. La palabra «completud» –que a veces se emplea para lo que aquí llamamos suficiencia– la reservamos para la propiedad que tiene una teoría formal T cuando para cada sentencia φ de su lenguaje formal ocurre que φ es un teorema de T o que $\neg\varphi$ es un teorema de T. Es en ese sentido en el que Gödel probó que la aritmética formal (y cualquier teoría que la incluya) es incompleta. Limitándonos al primer orden

podemos decir que Gödel probó que el cálculo lógico es suficiente, pero que las teorías interesantes formuladas con su ayuda son incompletas.

Este libro reúne la totalidad de los escritos de Gödel publicados hasta ahora, ordenados cronológicamente. Cada uno de ellos está precedido de una pequeña introducción mía que lo sitúa en su contexto más general y a veces lo resume someramente. La bibliografía final recoge las obras a las que Gödel alude en sus escritos (más algunas otras mencionadas en las introducciones). Las referencias a la bibliografía se hacen mediante el apellido del autor y la fecha de la obra. Los añadidos a las notas se sitúan entre corchetes dobles.

La mayoría de los artículos originalmente escritos en inglés sobre lógica y teoría de conjuntos (es decir, Gödel [1934], [1938], [1939a], [1940], [1944], [1946] y [1947] han sido traducidos por Enrique Casanovas, que es un buen conocedor de la teoría de conjuntos de Gödel, y a quien agradezco la eficaz ayuda que me ha prestado en la difícil preparación de esta obra. Los artículos sobre cosmología relativista (es decir, Gödel [1949], [1949a] y 1952] han sido traducidos por el conocido filósofo de la física Ulises Moulines. El resto de los artículos (en especial, todos los originalmente escritos en alemán) han sido traducidos por mí. En cualquier caso, he sentado los criterios para la unificación y actualización de la terminología y he revisado todas las traducciones, por lo que soy responsable de cuantos defectos puedan encontrarse en ellas.

Barcelona, junio de 1980.

JESÚS MOSTERÍN.

Introducción a:
*La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden**

En 1879 Frege había presentado el primer cálculo deductivo para lo que luego se llamaría la lógica de primer y segundo orden. En 1910 Russell y Whitehead habían ofrecido un cálculo deductivo que abarcaba no sólo la lógica de primer orden, sino la teoría entera de tipos. De todos modos hubo que esperar a

* La traducción literal del título de este artículo sería «La completud de los axiomas del cálculo lógico funcional». Pero ahora llamamos cálculo lógico de primer orden a lo que hace cincuenta años se llamaba cálculo lógico funcional. Por otro lado, la palabra «completud», tal como la emplea Gödel, es ambigua. Las más de las veces se refiere a la propiedad que tiene una teoría formal cuando para cualquier sentencia de su lenguaje ocurre que ella o su negación es un teorema de la teoría. En esos casos hablaremos nosotros también de completud, teoría completa, sistema formal completo, etc. Pero otras veces –sobre todo en el presente artículo– la palabra «completud» se refiere a algo completamente distinto: a la propiedad que tiene un cálculo cuando sus reglas (y axiomas lógicos) son suficientes para derivar con su ayuda todas las fórmulas lógicamente válidas (o, equivalentemente, todas las consecuencias de los axiomas no lógicos dados). En este caso hablaremos de la suficiencia del cálculo y de cálculo suficiente. Un cálculo lógico es *correcto* si *sólo* permite deducir (sin premisas) fórmulas válidas. Es *suficiente* si permite deducir *todas* las fórmulas válidas. Y es *adecuado* si es a la vez correcto y suficiente, es decir, si permite deducir todas y solas las fórmulas válidas.

1928 para que Hilbert y Ackermann delimitaran de un modo claro la lógica de primer orden y presentaran un cálculo deductivo para ella. Desde luego ese cálculo no era sintácticamente completo en el sentido de que para cada fórmula o bien ella o bien su negación fuera deducible con su ayuda. En efecto, un cálculo lógico deductivo sólo trata de generar las fórmulas válidas y hay muchas fórmulas tales que ni ellas ni su negación son válidas. Lo que sí podía plantearse era la cuestión de si el cálculo era semánticamente suficiente, es decir, si permitía deducir todas las fórmulas válidas. Hilbert y Ackermann manifestaban explícitamente en su libro (pág. 68) que esa pregunta aún no había encontrado respuesta en 1928. La respuesta la daría Gödel dos años después, en 1930, con la publicación de su artículo sobre la suficiencia del cálculo lógico de primer orden, y esta respuesta sería positiva: el cálculo lógico de primer orden es lo suficientemente potente como para deducir con su ayuda todas las fórmulas válidas. Con esto el programa de Hilbert obtenía un primer y esperanzador éxito.

Gödel toma como punto de referencia el cálculo lógico de primer orden contenido en *Principia Mathematica*. Russell y Whitehead no se habían planteado ninguna cuestión semántica, limitándose al desarrollo sintáctico de su sistema formal. Pero ante tal proceder «se plantea naturalmente la cuestión» –como dice Gödel– de si tal sistema formal es semánticamente suficiente o no, de si sus axiomas y reglas bastan para deducir todas las fórmulas válidas o no. Ya Bernays había probado previamente que el fragmento más trivial –el cálculo conectivo– era semánticamente suficiente. Gödel prueba ahora que un fragmento mucho más amplio e importante –el cálculo cuantificacional de primer orden– es semánticamente suficiente. Y la prueba es inmediatamente aplicable al cálculo deductivo de Hilbert y Ackermann (o al fragmento de primer orden de Frege). De hecho, todos los cálculos lógicos de primer orden actualmente usados son semánticamente suficientes, pues sería absurdo emplear cálculos insuficientes para una lógica suficientemente abarcable mediante un cálculo.

El famoso *teorema de suficiencia semántica del cálculo lógico de primer orden* aparece en el artículo como teorema I: *Toda fórmula válida es deducible* (es decir, derivable con ayuda de los

axiomas y reglas de inferencia del cálculo). El teorema I sería trivialmente demostrable si dispusiéramos del teorema II: *Cada fórmula es refutable o satisfacible* (sobre un universo numerable). En efecto, I afirma que cada fórmula válida es deducible. Sea φ una fórmula válida cualquiera. Puesto que φ es válida, $\neg\varphi$ no es satisfacible. Por tanto, por el teorema II, $\neg\varphi$ es refutable, es decir, $\neg\neg\varphi$ es deducible y, por tanto, también φ es deducible.

Gödel define las K-fórmulas como sentencias prenexas, cuyo prefijo comienza con $\forall$ y termina con $\exists$, y prueba que si cada K-fórmula es refutable o satisfacible, entonces también lo es toda fórmula (teorema III). Para ello procede por inducción sobre el grado de las K-fórmulas, definido como el número de secuencias continuas de cuantificadores universales (separadas unas de otras por cuantificadores existenciales) en el prefijo de cada K-fórmula. En el teorema IV prueba que si cada K-fórmula de grado n es refutable o satisfacible, también lo es cada una de grado $n+1$. Con esto sólo le queda por probar el teorema V: cada K-fórmula de primer grado es refutable o satisfacible. Esta prueba es la más difícil, y se lleva a cabo definiendo para cada K-fórmula $\pi\alpha$ (donde π es el prefijo y α el núcleo) una sucesión infinita de fórmulas $\pi_n\alpha_n$, tales que para cada n es deducible $\pi\alpha \rightarrow \pi_n\alpha_n$ (teorema VI). Finalmente (y aquí estriba la novedad fundamental de Gödel respecto a anteriores resultados parciales de Löwenheim y Skolem) Gödel introduce consideraciones semánticas y, para cada K-fórmula que no es refutable, construye un modelo que la satisface. Con esto queda probado el teorema V, y con él el II y el I, es decir, queda demostrada la suficiencia semántica del cálculo lógico de primer orden.

En 1915 Löwenheim había probado que si una fórmula es satisfacible en un modelo cualquiera, entonces es satisfacible también en algún modelo (de ámbito) numerable. En 1920 Skolem había generalizado este resultado a un conjunto cualquiera de fórmulas de primer orden. Este *teorema de Löwenheim-Skolem* se desprende ahora como corolario de la prueba del teorema de suficiencia por Gödel. En efecto, el modelo que Gödel construye para cada fórmula no refutable tiene el conjunto de los números naturales como ámbito y es, por tanto, un modelo numerable. Sea φ una fórmula satisfacible cualquiera. Puesto que φ es satisfacible, φ no es refutable (dada la corrección

del cálculo). Por tanto, φ es satisfacible en un modelo numerable. Así pues, cualquier fórmula satisfacible en general es ya satisfacible sobre un ámbito numerable.

Una vez probado el teorema de suficiencia para el cálculo deductivo de primer orden sin identidad, Gödel lo generaliza, extendiéndolo a la lógica de primer orden con identidad. También cada fórmula válida de primer orden con identidad es deducible con el cálculo correspondiente (teorema VII).

Otro corolario del teorema de suficiencia es el *teorema de compacidad* –un conjunto infinito de fórmulas es satisfacible si y sólo si cada uno de sus subconjuntos finitos lo es (teorema X)–, de tan fecundas aplicaciones matemáticas.

Finalmente, prueba Gödel la independencia de los axiomas del cálculo deductivo de la lógica de primer orden con identidad que ha estado considerando.

La prueba de suficiencia de la lógica de primer orden por Gödel en 1930 marca un jalón en la historia de la lógica. A partir de entonces el teorema ha sido probado también de otras maneras. En 1930 Hilbert y Bernays ofrecieron una prueba puramente sintáctica del mismo. En 1949 Henkin presentó una nueva prueba, semántica como la de Gödel, pero mucho más simple. La prueba de Henkin, simplificada a su vez por Hasenjaeger y otros, constituye la base de la mayor parte de las pruebas actuales de la suficiencia. También se utiliza el método de las tablas semánticas, más afín a la primitiva prueba de Gödel.

El teorema de la suficiencia semántica del cálculo deductivo de primer orden, junto con sus corolarios –los teoremas de Löwenheim-Skolem y de compacidad– están a la base de la teoría de modelos y de gran parte de la lógica actual.

La prueba de este teorema constituyó la tesis doctoral de Gödel, escrita en 1929 y aceptada por la Universidad de Viena el 6 de febrero de 1930. En el mismo año 1929 Gödel reescribió su tesis y la envió para su publicación como artículo.

El artículo de Gödel apareció bajo el título *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls* (La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden) en la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik*, volumen 37 (1930), pp. 349-360. La versión original del artículo ha sido reeditada en la

antología de Karel Berka y Lothar Kreiser: *Logik-Texte* (Akademie-Verlag, Berlín, 1971), pp. 283-294. Una buena traducción literal al inglés (por Stefan Bauer-Mengelberg) se encuentra en la antología de Jean van Heijenoort: *From Frege to Gödel* (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967), pp. 582-591.

J. M.

LA SUFICIENCIA DE LOS AXIOMAS DEL CALCULO LOGICO DE PRIMER ORDEN[1]

Como es bien sabido, Whitehead y Russell han construido la lógica y la matemática poniendo en cabeza como axiomas ciertas sentencias evidentes y deduciendo a partir de ellas los teoremas de la lógica y la matemática de un modo puramente formal (es decir, sin hacer uso del significado de los símbolos), según algunos principios de inferencia formulados con toda precisión. Respecto a esta manera de proceder, se plantea de inmediato la cuestión de si el sistema de axiomas y principios de inferencia que hemos puesto en cabeza es suficiente, es decir, si realmente basta para deducir cada teorema lógico-matemático, o si más bien es posible pensar en sentencias verdaderas (y quizá también demostrables según otros principios) que no puedan ser derivadas en el sistema considerado. Esta pregunta ya ha encontrado una respuesta positiva para el dominio de las fórmulas de la lógica conectiva, es decir, se ha mostrado[2] que de hecho cada fórmula conectiva válida se sigue de los axiomas presentados en *Principia Mathematica*. Aquí vamos a hacer lo

---

[1] Tengo que agradecer al profesor H. Hahn varios consejos valiosos sobre la escritura de este artículo.

[2] Véase P. Bernays (1926): *Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der «Principia Mathematica»*.

mismo para un dominio más amplio de fórmulas, a saber, para las de la lógica de primer orden[3], es decir, tenemos que mostrar:

Teorema I: Cada fórmula válida[4] de la lógica de primer orden es deducible.

Tomamos como base el siguiente sistema axiomático[5]:

Signos básicos primitivos: $\neg$, $\vee$, $\forall$ (A partir de ellos pueden definirse $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$ del modo habitual).

Axiomas formales:

1. $X \vee X \rightarrow X$
2. $X \rightarrow X \vee Y$
3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$
4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$
5. $\forall x\, Px \rightarrow Py$
6. $\forall x(X \vee Px) \rightarrow X \vee \forall x\, Px$

Reglas de inferencia[6]:

1. El esquema de inferencia: De α y $\alpha \rightarrow \beta$ se puede inferir β.

---

[3] En terminología y simbolismo este trabajo sigue a Hilbert-Ackermann (1928): *Grunzüge der theoretischen Logik* ⟦esta traducción a la 4.ª edición de ese libro, 1958⟧. Según esa obra, el lenguaje de la lógica de primer orden contiene las fórmulas que se pueden formar a partir de las variables sentenciales X, Y, Z, ..., y las variables predicativas (es decir, variables de propiedades o relaciones) de primer tipo F, G, H, ..., mediante las operaciones $\vee$ (o), $\neg$ (no), $\forall$ (para todo), $\exists$ (existe), donde la variable en los prefijos $\forall x$ o $\exists x$ sólo puede referirse a individuos, no a relaciones. Una tal fórmula se llama válida (o tautológica) si un enunciado verdadero resulta siempre que sustituyamos X, Y, Z, ..., por sentencias determinadas y F, G, ..., por relaciones determinadas (como ocurre, por ejemplo, con $\forall x[Fx \vee \neg Fx]$).

[4] Más precisamente debiéramos decir «válida en cada dominio de individuos», lo que, de acuerdo con teoremas bien conocidos, significa lo mismo que «válida en el dominio infinito numerable de individuos». La validez de una fórmula con variables individuales libres $\varphi(x, y, ..., w)$ significa la validez de $\forall xy \ldots w\ \varphi(x, y, ..., w)$ y su satisfacibilidad, la satisfacibilidad de $\exists xy \ldots w\ \varphi(x, y, ..., w)$, de tal modo que siempre ocurre que «φ es válido» equivale a «$\neg\varphi$ no es satisfacible».

[5] Coincide (excepto respecto al principio de asociatividad, que es redundante, según probó P. Bernays) con el expuesto en *1 y *10 de *Principia Mathematica.*

[6] No todas estas reglas están explícitamente formuladas en Russell-Whitehead, pero todas ellas son continuamente usadas en las deducciones.

2. La regla de sustitución para variables sentenciales y predicativas.
3. De $\alpha(x)$ puede inferirse $\forall x\ \alpha(x)$.
4. Unas variables individuales (libres o ligadas) pueden ser reemplazadas por cualesquiera otras, con tal de que ello no produzca ningún solapamiento de los alcances de las variables designadas mediante el mismo signo.

Para lo que sigue es conveniente introducir algunas notaciones abreviadas.

π_1, π_2, π_3, ρ, etc., designan prefijos cualesquiera, es decir, filas de signos finitas de la forma $\forall x \exists y$, $\forall y \forall x \exists z \forall u$, etc.

Las letras alemanas minúsculas $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, etc., designan n-tuplos de variables individuales, es decir, filas de signos del tipo de xyz, $x_2x_1x_2x_3$, etc., donde la misma variable puede aparecer varias veces. Del modo correspondiente hay que entender $\forall\mathfrak{x}$, $\exists\mathfrak{y}$, etcétera. Si una misma variable aparece varias veces en $\mathfrak{x}$, hay que pensar, naturalmente, que sólo está escrita una vez en $\forall\mathfrak{x}$, $\exists\mathfrak{x}$.

Además necesitamos una serie de lemas, que vamos a reunir aquí. No presentamos las pruebas, pues en parte son bien conocidas y en parte son fáciles de realizar:

1. Para cada n-tuplo $\mathfrak{x}$ es deducible:

a) $\forall\mathfrak{x}F\mathfrak{x} \rightarrow \exists\mathfrak{x}F\mathfrak{x}$

b) $\forall\mathfrak{x}F\mathfrak{x} \wedge \exists\mathfrak{x}G\mathfrak{x} \rightarrow \exists\mathfrak{x}(F\mathfrak{x} \wedge G\mathfrak{x})$

c) $\forall\mathfrak{x} \neg F\mathfrak{x} \leftrightarrow \neg \exists\mathfrak{x}F\mathfrak{x}$

2. Si $\mathfrak{x}$ y $\mathfrak{x}'$ sólo se diferencian por el orden en que están escritas las variables, es deducible:

$$\exists\mathfrak{x}F\mathfrak{x} \rightarrow \exists\mathfrak{x}'F\mathfrak{x}'$$

3. Si todas las variables de $\mathfrak{x}$ son distintas entre sí y $\mathfrak{x}'$ tiene el mismo número de miembros que $\mathfrak{x}$, es deducible:

$$\forall\mathfrak{x}F\mathfrak{x} \rightarrow \forall\mathfrak{x}'F\mathfrak{x}'$$

incluso si en $\mathfrak{x}'$ aparecen varias variables iguales.

4. Si π_i designa uno de los prefijos $\forall x_i$, $\exists x_i$ y ρ_i, uno de los prefijos $\forall y_i$, $\exists y_i$, entonces es deducible[7]:

[7] Un teorema análogo vale para $\vee$ en vez de $\wedge$.

$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_n \mathsf{F}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\cdots\mathsf{x}_n \wedge \rho_1\rho_2\cdots\rho_m \mathsf{G}\mathsf{y}_1\mathsf{y}_2\cdots\mathsf{y}_m \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \pi(\mathsf{F}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\cdots\mathsf{x}_n \wedge \mathsf{G}\mathsf{y}_1\mathsf{y}_2\cdots\mathsf{y}_m)$$

para cada prefijo π que se componga de los π_i y ρ_i y que satisfaga la condición de que π_i esté delante de π_k para $i<k\leqslant n$ y de que ρ_i esté delante de ρ_k para $i<k\leqslant m$.

5. Toda fórmula puede ponerse en forma normal prenexa, es decir, para cada fórmula α hay una fórmula prenexa γ, tal que $\alpha\leftrightarrow\gamma$ es deducible[8].

6. Si $\alpha\leftrightarrow\beta$ es deducible, entonces también lo es $\varphi(\alpha)\leftrightarrow\varphi(\beta)$, donde $\varphi(\alpha)$ designa una fórmula cualquiera que contenga α como parte. (Véase Hilbert-Ackermann [1928], III, § 7.)

7. Cada fórmula conectiva válida es deducible, es decir, los axiomas 1-4 constituyen un sistema suficiente de axiomas para el cálculo conectivo[9].

Ahora pasamos a probar el teorema I, que también puede ser formulado de la siguiente forma:

Teorema II: Cada fórmula de la lógica de primer orden es o refutable[10] *o satisfacible (sobre un universo infinito numerable).*

Que I se sigue de II se obtiene así: Sea α una fórmula válida; entonces $\neg\alpha$ no es satisfacible y, por tanto, según II es refutable, es decir, $\neg\neg\alpha$ (y por tanto también α) es deducible. De modo igualmente fácil se comprueba la otra dirección.

Definamos ahora una clase K de fórmulas κ mediante las siguientes condiciones:

1. κ es una fórmula prenexa.
2. κ carece de variables individuales libres.
3. El prefijo de κ comienza con un cuantificador universal y termina con un cuantificador particular.

Entonces vale:

---

[8] Véase Hilbert-Ackermann (1928): *Grundzüge der teorestischen Logik*, III, § 8 ⟦en la 4.° ed., III, § 7⟧.

[9] Véase el trabajo citado en la nota 2.

[10] «φ es refutable», significa «$\neg\varphi$ es deducible».

Teorema III: Si cada K-fórmula es refutable o satisfacible[11], *también lo es cualquier fórmula.*

Prueba: Sea α una fórmula que no pertenece a K y sean $\mathfrak{x}$ sus variables libres. Como inmediatamente se ve, de la refutabilidad de α se sigue la de $\exists\mathfrak{x}\alpha$, y a la inversa (por el lema 1c, la regla de inferencia 3 y el axioma 5). Lo mismo vale para la satisfacibilidad, por la convención de la nota 4. Sea $\pi\varphi$ la forma normal prenexa de $\exists\mathfrak{x}\alpha$, de tal modo que

(1) $$\exists\mathfrak{x}\alpha \leftrightarrow \pi\varphi$$

es deducible. Además estipulemos que

$$\beta = \forall x \pi \exists y(\varphi \wedge (Fx \vee \neg Fy))$$[12]

Entonces

(2) $$\pi\varphi \leftrightarrow \beta$$

es deducible (por el lema 4 y por la deducibilidad de $\forall x \exists y(Fx \vee \neg Fy)$). β pertenece a K y, por tanto, es o satisfacible o refutable. Pero por (1) y (2) la satisfacibilidad de β implica la de $\exists\mathfrak{x}\alpha$ y consiguientemente también la de α, y lo mismo vale para la refutabilidad. Por tanto, también α es o satisfacible o refutable.

Teniendo en cuenta el teorema III, basta, pues, para probar el teorema II con probar:

Cada K-fórmula es o satisfacible o refutable.

Para ello definimos como grado de una K-fórmula[13] el número de series de cuantificadores universales de su prefijo,

[11] «satisfacible» a veces significa aquí y en el resto del artículo «satisfacible en un dominio infinito numerable de individuos». Lo mismo puede decirse de «válido».

[12] Las variables x, y no deben aparecer en π.

[13] En el mismo sentido empleamos la expresión «grado de un prefijo».

separadas unas de otras por cuantificadores existenciales. Primeramente mostramos:

Teorema IV: Si cada K-fórmula de grado n es o satisfacible o refutable, entonces también lo es cada K-fórmula de grado $n+1$.

Prueba: Sea $\pi_1\alpha$ una K-fórmula de grado $n+1$. Sea $\pi_1 = \forall\mathfrak{x}\exists\mathfrak{y}\,\pi_2$ y $\pi_2 = \forall\mathfrak{u}\exists\mathfrak{v}\,\pi_3$, donde π_2 tiene el grado n y π_3 el grado $n-1$. Sea además F una variable predicativa que no aparezca en α. Establezcamos[14]:

$$\beta = \forall\mathfrak{x}'\exists\mathfrak{y}'\,\mathsf{F}\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' \wedge \forall\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}\,(\mathsf{F}\mathfrak{x}\mathfrak{y} \to \pi_2\alpha)$$

y

$$\gamma = \forall\mathfrak{x}'\forall\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}\forall\mathfrak{u}\exists\mathfrak{y}'\exists\mathfrak{v}\,\pi_3(\mathsf{F}\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' \wedge (\mathsf{F}\mathfrak{x}\mathfrak{y} \to \alpha))$$ [15]

Aplicando dos veces el lema 4 junto con el lema 6 obtenemos la deducibilidad de

(3) $$\beta \leftrightarrow \gamma$$

Además está claro que la fórmula

(4) $$\beta \to \pi_1\alpha$$

es válida. Ahora bien, γ tiene grado n, y por tanto es por hipótesis o satisfacible o refutable. Si γ es satisfacible, entonces también lo es $\pi_1\alpha$ (por (3) y (4)). Si γ es refutable, entonces también lo es β (por (3)), es decir, entonces $\neg\beta$ es deducible. Y si sustituimos F por $\pi_2\alpha$ en $\neg\beta$, obtenemos que en este caso es deducible:

$$\neg(\forall\mathfrak{x}'\exists\mathfrak{y}'\,\pi_2\alpha \wedge \forall\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}\,(\pi_2\alpha \to \pi_2\alpha))$$

---

[14] Th. Skolem ha empleado un procedimiento análogo para la prueba del teorema de Löwenheim.

[15] Naturalmente, suponemos que las sucesiones de variables $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ son disjuntas entre sí.

Pero puesto que naturalmente

$$\forall \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y} (\pi_2 \alpha \rightarrow \pi_2 \alpha)$$

es deducible, también lo es $\neg \forall \mathfrak{x}\ '\exists \mathfrak{y}' \pi_2 \alpha$, es decir, en este caso $\pi_1 \alpha$ es refutable. Por tanto, de hecho $\pi_1 \alpha$ es o refutable o satisfacible.

Ahora ya sólo nos queda por probar:

Teorema V: Cada K-fórmula de primer grado es o satisfacible o refutable.

La prueba requiere algunas definiciones previas. Sea $\forall \mathfrak{x} \exists \mathfrak{y} \alpha(\mathfrak{x}; \mathfrak{y})$ –abreviado como $\pi\alpha$– una fórmula cualquiera de primer grado. Mediante $\mathfrak{x}$ representamos un r-tuplo de variables, con $\mathfrak{y}$ un s-tuplo. Consideremos los r-tuplos sacados de la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots x_i \ldots$ ordenados por la suma creciente de sus índices en una sucesión:

$$\mathfrak{x}_1 = (x_0, x_0, \cdots x_0), \ \mathfrak{x}_2 = (x_1, x_0, \cdots x_0), \ \mathfrak{x}_3 = (x_0, x_1, x_0 \cdots x_0)$$

etcétera, y definamos una sucesión $\{\alpha_n\}$ de fórmulas derivadas a partir de $\pi\alpha$ del siguiente modo:

$$\alpha_1 = \alpha(\mathfrak{x}_1; x_1, x_2 \cdots x_s)$$
$$\alpha_2 = \alpha(\mathfrak{x}_2; x_{s+1}, x_{s+2} \cdots x_{2s}) \wedge \alpha_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_n = \alpha(\mathfrak{x}_n; x_{(n-1)s+1}, x_{(n-1)s+2} \cdots x_{ns}) \wedge \alpha_{n-1}$$

Designemos mediante $\mathfrak{y}_n$ el s-tuplo $x_{(n-1)s+1} \cdots x_{ns}$, de tal modo que:

(5) $$\alpha_n = \alpha(\mathfrak{x}_n; \mathfrak{y}_n) \wedge \alpha_{n-1}$$

Además definimos $\pi_n \alpha_n$, estableciendo:

$$\pi_n \alpha_n = \exists x_0 \exists x_1 \cdots \exists x_{ns} \alpha_n$$

Como fácilmente se comprueba, en α_n aparecen precisamente las variables $x_0 \cdots$ hasta x_{ns}, que están también ligadas por el prefijo π_n. Además es evidente que las variables del r-tuplo $\mathfrak{x}_{n+1}$ ya aparecen en π_n (y por tanto son distintas de las que aparecen en $\mathfrak{y}_{n+1}$). Designemos mediante π_n' lo que queda de π_n cuando suprimimos las variables de r-tuplo $\mathfrak{x}_{n+1}$. Si nos olvidamos del orden de aparición de las variables, $\exists \mathfrak{x}_{n+1} \pi_n' = \pi_n$.

Supuestas estas notaciones, tenemos:

Teorema VI: Para cada n es deducible: $\pi\alpha \rightarrow \pi_n \alpha_n$.

Probaremos el teorema por inducción completa.

I. $\pi\alpha \rightarrow \pi_1 \alpha_1$ es deducible, pues tenemos:

$$\forall \mathfrak{x} \exists \mathfrak{y} \alpha(\mathfrak{x};\ \mathfrak{y}) \rightarrow \forall \mathfrak{x}_1 \exists \mathfrak{y}_1 \alpha(\mathfrak{x}_1;\ \mathfrak{y}_1)$$

(por el lema 3 y la regla de inferencia 4) y

$$\forall \mathfrak{x}_1 \exists \mathfrak{y}_1\ \alpha(\mathfrak{x}_1;\ \mathfrak{y}_1) \rightarrow \exists \mathfrak{x}_1 \exists \mathfrak{y}_1\ \alpha(\mathfrak{x}_1;\ \mathfrak{y}_1)$$

(por el lema 1 a).

II. $\pi\alpha \wedge \pi_n \alpha_n \rightarrow \pi_{n+1} \alpha_{n+1}$ es deducible para cada n, pues tenemos:

$$\forall \mathfrak{x} \exists \mathfrak{y} \alpha(\mathfrak{x};\ \mathfrak{y}) \rightarrow \forall \mathfrak{x}_{n+1} \exists \mathfrak{y}_{n+1} \alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\ \mathfrak{y}_{n+1}) \tag{6}$$

(por el lema 3 y la regla de inferencia 4) y

$$\pi_n \alpha_n \rightarrow \exists \mathfrak{x}_{n+1} \pi_n' \alpha_n \tag{7}$$

(por el lema 2). Además

$$\forall \mathfrak{x}_{n+1} \exists \mathfrak{y}_{n+1} \alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\ \mathfrak{y}_{n+1}) \wedge \exists \mathfrak{x}_{n+1} \pi_n' \alpha_n \rightarrow \rightarrow \exists \mathfrak{x}_{n+1} (\exists \mathfrak{y}_{n+1} \alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\ \mathfrak{y}_{n+1}) \wedge \pi_n' \alpha_n) \tag{8}$$

(por el lema 1 b, donde hemos sustituido F por $\exists \mathfrak{x}_{n+1}\alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\ \mathfrak{y}_{n+1})$ y G por $\pi'\alpha_n$).

Fijándonos en que el antecedente del condicional (8) es la conyunción de los consiguientes de (6) y (7), comprobamos que es deducible:

(9) $$\pi\alpha \wedge \pi_n\alpha_n \rightarrow \exists \mathfrak{x}_{n+1}(\exists \mathfrak{y}_{n+1}\alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\ \mathfrak{y}_{n+1}) \wedge \pi'_n\alpha_n)$$

Por otro lado, de (5) y los lemas 4, 6 y 2 se sigue la deducibilidad de:

(10) $$\exists \mathfrak{x}_{n+1}(\exists \mathfrak{y}_{n+1}\alpha(\mathfrak{x}_{n+1};\ \mathfrak{y}_{n+1}) \wedge \pi'_n\alpha_n) \leftrightarrow \pi_{n+1}\alpha_{n+1}$$

De (9) y (10) se sigue II, y de II, junto con I, se sigue el teorema VI.

Supongamos que en α aparecen las variables predicativas F_1, $F_2 \cdots F_k$ y las variables sentenciales X_1, $X_2 \cdots X_l$. Entonces α_n se construye con la sola ayuda de los conectores $\vee$ y $\neg$ a partir de componentes elementales del tipo:

$$F_1 x_{p1} \cdots x_{q1},\ F_2 x_{p2} \cdots x_{q2},\ \cdots;\ X_1,\ X_2.\ \cdots X_l$$

A cada α_n le hacemos corresponder una fórmula conectiva β_n, que obtenemos reemplazando los componentes elementales de α_n por variables sentenciales, de tal modo que a diferentes componentes elementales (aunque sólo se diferencien respecto a las variables individuales) los reemplacemos por variables sentenciales distintas. Por otro lado, vamos a designar como «modelo[0] de nivel n de $\pi\alpha$» a un sistema de relaciones $R_1^n \cdots R_k^n$, definido en el dominio de los números naturales z $(0 \leqslant z < ns)$, así como de valores veritativos w_1^n, $w_2^n \cdots w_l^n$ para las variables sentenciales X_1, $X_2 \cdots X_l$, tales que la sustitución en α_n de los F_i por los R_i^n, de los x_i por los números i y de X_i por los correspondientes valores veritativos w_i^n da lugar a un enunciado

[0] [[Aquí traducimos «Erfüllungssystem» –literalmente, sistema satisfactorio– por «modelo»]].

verdadero. Evidentemente, existen modelos de nivel n si y sólo si β_n es satisfacible.

Cada β_n, como fórmula conectiva, es o satisfacible o refutable (lema 7). Por tanto, sólo pueden darse dos casos:

1. Al menos un β_n es refutable. Entonces, como fácilmente se ve (por las relas de inferencia 2 y 3 y el lema 1 c), también es refutable la correspondiente $\pi_n \alpha_n$ y, a causa de la demostrabilidad de $\pi\alpha \rightarrow \pi_n \alpha_n$, también $\pi\alpha$ lo es.
2. Ningún β_n es refutable, es decir, todos los β_n son satisfacibles. Entonces hay modelos de cada nivel. Pero puesto que sólo hay un número finito de modelos para cada nivel (a causa de la finitud de los correspondientes dominios de individuos) y puesto que además cada modelo de nivel $n+1$ contiene como parte[16] otro modelo de nivel n (lo que se desprende inmediatamente de la manera como se construyen los α_n mediante repetidas conyunciones), por conocidos razonamientos se sigue que en este caso hay una sucesión de modelos $S_1, S_2, \cdots S_k \cdots$ (S_k de nivel k), cada uno de los cuales contiene al anterior como parte. Ahora definimos en el dominio de los números naturales un sistema $\mathscr{S} = \{S_1, S_2 \cdots S_k; v_1 v_2 \cdots v_l\}$ mediante las siguientes estipulaciones:

1. $S_p a_1 \cdots a_i$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$ debe valer si y sólo si para al menos un S_m de la sucesión anteriormente citada (y entonces también para todos los siguientes) vale $R_p^m a_1 \cdots a_i$.
2. $v_i = w_i^m (1 \leqslant i \leqslant l)$ para al menos un S_m (y entonces también para todos los siguientes).

Entonces está claro, sin más, que el sistema $\mathscr{S}$ hace verdadera la fórmula $\pi\alpha$. Así pues, en este caso $\pi\alpha$ es satisfacible, con lo que ha terminado la prueba de la suficiencia del sistema de axiomas arriba indicado. Podemos señalar que la ahora ya probada

---

[16] Que un sistema $\{F_1, F_2, ..., F_k; w_1, w_2, ..., w_l\}$ es parte de otro $\{G_1, G_2, ..., G_k; v_1, v_2, ..., v_l\}$ significa que:

1. El dominio de individuos de los F_i es parte del dominio de individuos de los G_i.
2. Los F_i coinciden con los G_i en el dominio más reducido.
3. Para cada i, $v_i = w_i$.

equivalencia entre «válido» y «deducible» implica una reducción de lo supernumerable a lo numerable respecto al problema de la decisión, pues «válido» se refiere al conjunto supernumerable de las relaciones, mientras que «deducible» sólo supone el conjunto numerable de las deducciones.

Los teoremas I y II pueden ser generalizados en diversas direcciones. Por lo pronto es fácil considerar también el concepto de identidad (entre individuos), añadiendo a los axiomas 1-6 arriba indicados los dos siguientes:

7. $x = x$

8. $x = y \rightarrow (Fx \rightarrow Fy)$

También para este dominio ampliado de fórmulas vale de modo análogo como antes el

Teorema VII: Cada fórmula válida (*más precisamente, válida en cada dominio de individuos*) *de la lógica de primer orden con identidad es deducible.*

Y, equivalente con éste, el

Teorema VIII: Cada fórmula de la lógica de primer orden con identidad es o refutable o satisfacible (y precisamente sobre un dominio de individuos finito o infinito numerable).

Para probarlo supongamos que α sea una fórmula cualquiera de la lógica de primer orden con identidad. Construimos una fórmula β como la conjunción de α, de $\forall x\ x = x$ y de todas las fórmulas que se obtienen del axioma 8 sustituyendo la variable predicativa F por las variables predicativas que aparecen en α, es decir, más precisamente

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow (Fx \rightarrow Fy))$$

para todas las variables predicativas monádicas de α,

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (Fxz \rightarrow Fyz)) \wedge \forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (Fzx \rightarrow Fzy))$$

para todas las variables predicativas diádicas de α (incluida «=» misma); y las fórmulas correspondientes para las variables predicativas triádicas y otras poliádicas. Sea β' la fórmula que se obtiene a partir de β, sustituyendo en ésta el signo de identidad = por una variable predicativa G que no aparezca en β. En la fórmula β' ya no aparece el signo de identidad y es por tanto refutable o satisfacible, según probamos anteriormente. Si β' es refutable, también lo es β, que se obtiene de β' por sustitución de G por =. Pero β es la conyunción de α y el resto de la fórmula, que evidentemente es deducible a partir de los axiomas 7 y 8. Por tanto, en este caso también α es refutable. Supongamos ahora que β' sea satisfacible por un cierto sistema $\mathcal{S}$ de relaciones[17] sobre un dominio numerable de individuos S. De la manera de construirse β' se desprende que H (es decir, la relación del sistema $\mathcal{S}$ que corresponde a G) es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, y que por tanto genera una partición de los elementos de S, tal que los elementos de la misma clase pueden ser sustituidos unos por otros sin que cambie nada respecto al darse o no darse de una relación del sistema $\mathcal{S}$. Por consiguiente, si identificamos entre sí todos los elementos que pertenecen a la misma clase (por ejemplo, considerando las clases mismas como elementos de un nuevo dominio de individuos), H se convierte en la relación de identidad, con lo que tenemos una satisfacción de β y por tanto también de α. De hecho, pues, α es o satisfacible[18] o refutable.

Otra generalización del teorema I se obtiene considerando conjuntos infinitos numerables de fórmulas lógicas. También para ellos valen los análogos de I y II, es decir:

Teorema IX: Todo conjunto infinito numerable de fórmulas de la lógica de primer orden es o satisfacible (es decir, todas las fórmulas del conjunto son simultáneamente satisfacibles) *o contiene un subconjunto finito, cuya conyunción es refutable.*

---

[17] Si en α aparecen variables sentenciales, $\mathcal{S}$ debe contener, además de relaciones, también valores veritativos para esas variables sentenciales.

[18] Y en un dominio numerable (pues consta de clases disjuntas de individuos de un dominio denumerable *S*).

IX se sigue inmediatamente de:

Teorema X: Para que un conjunto infinito numerable de fórmulas sea satisfacible es necesario y suficiente que cada subconjunto finito suyo sea satisfacible.

Respecto al teorema X empezaremos por constatar que en su prueba podemos limitarnos a conjuntos de fórmulas normales[00] de primer grado, pues aplicando repetidamente el procedimiento empleado en la prueba de los teoremas III y IV a cada fórmula concreta podemos indicar para cada conjunto Σ de fórmulas un conjunto Σ' de fórmulas normales de primer grado, tal que la satisfacibilidad de un subconjunto cualquiera de Σ es equivalente con la del correspondiente subconjunto de Σ'.

Sea pues

$$\forall \mathfrak{x}_1 \exists \mathfrak{y}_1 \alpha_1(\mathfrak{x}_1; \mathfrak{y}_1), \forall \mathfrak{x}_2 \exists \mathfrak{y}_2 \alpha_2(\mathfrak{x}_2; \mathfrak{y}_2) \cdots \forall \mathfrak{x}_n \exists \mathfrak{y}_n \alpha_n(\mathfrak{x}_n; \mathfrak{y}_n) \cdots$$

un conjunto numerable Σ de fórmulas normales de primer grado, $\mathfrak{x}_i$ sea un r_i-tuplo, $\mathfrak{y}_i$ un s_i-tuplo de variables. $\mathfrak{x}_1^i, \mathfrak{x}_2^i, \cdots \mathfrak{x}_n^i \cdots$ sea una sucesión de todos los r_i-tuplos de elementos de la sucesión $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, ordenados por suma creciente de índices, además sea $\mathfrak{y}_k^i$ un s_i-tuplo de variables de la sucesión antes citada, tal que si en la sucesión

$$\mathfrak{y}_1^1, \mathfrak{y}_2^1, \mathfrak{y}_1^2, \mathfrak{y}_3^1, \mathfrak{y}_2^2, \mathfrak{y}_1^3, \mathfrak{y}_4^1, \cdots, \text{etc.}$$

reemplazamos cada uno de los $\mathfrak{y}_k^i$ por el correspondiente s_i-tuplo de variables, obtenemos la sucesión $x_i, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ Además definimos, de modo análogo a como ya antes hicimos, una sucesión de fórmulas β_n mediante las estipulaciones:

$$\beta_1 = \alpha_1(\mathfrak{x}_1^1; \mathfrak{y}_1^1)$$

$$\beta_n = \beta_{n-1} \wedge \alpha_1(\mathfrak{x}_n^1; \mathfrak{y}_n^1) \wedge \alpha_2(\mathfrak{x}_{n-1}^2; \mathfrak{y}_{n-1}^2) \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1} \quad (\mathfrak{x}_2^{n-1}; \mathfrak{y}_2^{n-1}) \wedge \alpha_n(\mathfrak{x}_i^n; \mathfrak{y}_1^n)$$

[00] [[Es decir, K-fórmulas, en la terminología anterior.]]

Fácilmente se ve que $\pi_n \beta_n$ (es decir, la fórmula que se obtiene a partir de β_n ligando todas sus variables libres mediante cuantificadores $\exists$) es una consecuencia de las primeras n fórmulas del anterior conjunto Σ. Por tanto, si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible, también lo es cada β_n. Pero si cada β_n es satisfacible, entonces también lo es el conjunto Σ entero (lo cual puede obtenerse aplicando el razonamiento empleado en la prueba del teorema V). Con esto queda probado el teorema X. Los teoremas IX y X pueden ampliarse sin dificultad a sistemas formales que contengan el signo $=$ por el procedimiento empleado en la prueba del teorema VIII.

Todavía se puede dar otra versión del teorema IX, si nos limitamos a conjuntos de fórmulas sin variables sentenciales y si consideramos que estos conjuntos son sistemas axiomáticos, cuyos conceptos primitivos son las variables predicativas que allí aparecen. Entonces el teorema IX dice, evidentemente, que cualquier sistema axiomático finito o numerable, en cuyos axiomas «todo» y «hay» nunca se refieren a clases o relaciones, sino sólo a individuos[19], *o es contradictorio (es decir, se puede obtener en él una contradicción en un número finito de pasos formales) o posee un modelo.*

Tratemos, finalmente, de la cuestión de la independencia de los axiomas 1-8. Ninguno de los axiomas 1-4 se sigue de los otros tres, como ya ha mostrado P. Bernays[20]. Su independencia no resulta alterada por el añadido de los axiomas 5-8, como puede mostrarse mediante las mismas interpretaciones usadas por Bernays, extendiéndolas también a fórmulas que contengan variables predicativas y el signo $=$ mediante la estipulación de que:

1. Se suprimen los prefijos y las variables individuales.
2. En el resto de la fórmula, las variables predicativas se tratan como variables sentenciales.
3. El signo $=$ sólo puede ser sustituido por uno de los valores veritativos «señalados».

---

[19] El sistema axiomático de Hilbert para la geometría, exceptuando el axioma de continuidad, puede servir como ejemplo.

[20] Véase el trabajo citado en la nota 2.

Para mostrar la independencia del axioma 5 hacemos corresponder a cada fórmula otra fórmula, obtenida sustituyendo cada uno de sus componentes (caso de que los tenga) del tipo:

$$\forall x Fx, \forall y Fy \cdots; \forall x Gx, \forall y Gy \cdots; \cdots$$ [21]

por $X \vee \neg X$. Con esto los axiomas 1-4 y 6-8 se convierten en fórmulas válidas y lo mismo ocurre con las fórmulas derivadas de esos axiomas mediante las reglas de inferencia 1-4, como puede comprobarse por inducción completa, mientras que el axioma 5 no posee esa propiedad. De exactamente el mismo modo se muestra la independencia del axioma 6, sólo que ahora $\forall x Fx$, $\forall y Fy$, $\cdots$, etc., han de ser reemplazadas por $X \wedge \neg X$. Para probar la independencia del axioma 7 basta con señalar que los axiomas 1-6 y 8 (y por tanto todas las fórmulas derivadas de ellos) continúan siendo válidos al reemplazar la relación de identidad por la relación vacía, mientras que ello no ocurre con el axioma 7. Análogamente, las fórmulas derivadas de los axiomas 1-7 siguen siendo lógicamente válidas al reemplazar la relación de identidad por la relación universal, mientras que ello no ocurre con el axioma 8 (en un dominio de individuos con al menos dos individuos). También es fácil comprobar que ninguna de las reglas de inferencia 1-4 es superflua, aunque aquí renunciamos a mostrarlo en detalle.

[21] Es decir, las variables predicativas F, G, ..., etc., precedidas de un cuantificador universal, cuyo alcance se limita a la fórmula formada por la F, G, etcétera, en cuestión y su correspondiente variable individual.

Introducción a:
Sobre la suficiencia del cálculo lógico

La tesis doctoral de Gödel, en que se probaba la suficiencia o completud semántica del cálculo deductivo de primer orden, fue escrita en 1929. Gödel obtuvo por ella el título de doctor el 6 de febrero de 1930. Una versión reescrita –[Gödel 1930]– de su tesis fue enviada en octubre de 1929 a la revista *Monatshefte für Mathematik*, donde apareció en 1930. Estos mismos resultados fueron presentados oralmente el 14 de mayo de 1930 en el coloquio matemático dirigido por K. Menger en Viena. Luego Gödel volvió a presentar oralmente sus resultados en una reunión de la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (Unión alemana de los matemáticos) celebrada en Königsberg el 6 de septiembre de 1930. El resumen aquí traducido apareció bajo el título *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls* (Sobre la suficiencia del cálculo lógico) en la revista *Die Naturwissenschaften*, vol. 18, pág. 1068, publicado en 1930.

Jesús Mosterín J. M.

SOBRE LA SUFICIENCIA DEL CALCULO LOGICO

En la fundamentación axiomática de la lógica, tal como se presenta, por ejemplo, en *Principia Mathematica*, se plantea la cuestión de si los axiomas de los que se parte son «suficientes», es decir, si realmente bastan para deducir formalmente cada teorema lógico correcto. Este problema sólo ha sido resuelto hasta ahora para los teoremas lógicos más sencillos, a saber, los del cálculo conectivo. La respuesta resulta ser positiva, es decir, cada fórmula conectiva correcta (válida) se sigue de los axiomas de *Principia Mathematica*. El conferenciante muestra cómo este teorema puede ser extendido a las fórmulas del cálculo lógico de primer orden (fórmulas sin variables predicativas ligadas).

Introducción a:
Algunos resultados metamatemáticos sobre completud y consistencia

En 1930 logró Gödel probar sus famosos teoremas sobre la incompletud de los sistemas formales que abarquen la aritmética recursiva primitiva y sobre la imposibilidad de probar en ellos su propia consistencia. En ese mismo año comunicó su descubrimiento a la Academia de Ciencias de Viena, en cuyo boletín publicó inmediatamente un anticipo-resumen del mismo.

Este anticipo-resumen, titulado *Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerpruchsfreiheit* (Algunos resultados metamatemáticos sobre completud y consistencia) apareció en el *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 67 (1930), págs. 214-215. El texto original está reimpreso en Berka y Kreiser (1971), págs. 320-321. Una traducción al inglés (por Stefan Bauer-Mengelberg) aparece en van Heijenoort (1967), págs. 595-596.

J. M.

Jesús Mosterín

ALGUNOS RESULTADOS METAMATEMATICOS SOBRE COMPLETUD Y CONSISTENCIA

Si a los axiomas de Peano añadimos la lógica de *Principia Mathematica*[1] (con los números naturales como individuos) con el axioma de elección (para todos los tipos), obtenemos un sistema formal S, para el cual valen los siguientes teoremas:

I. El sistema S no es completo, es decir, en él hay sentencias φ (que pueden efectivamente ser indicadas), tales que ni φ ni $\neg\varphi$ son deducibles y, en especial, hay problemas indecidibles con la sencilla estructura $\exists x\ Fx$, donde x varía sobre los números naturales y F es una propiedad (incluso decidible) de los números naturales[2].

II. Incluso si admitimos todos los medios lógicos de *Principia Mathematica* (por tanto, en especial el cálculo lógico de orden superior y el axioma de elección) en la metamatemática, no hay ninguna prueba de consistencia para el sistema S (y aún menos la hay si restringimos de alguna manera los medios de prueba). Por consiguiente, una prueba de consistencia del sistema S sólo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no estén formalizados en el sistema S, y algo

[1] Con axioma de reducibilidad o sin teoría ramificada de tipos.

[2] Además en S hay fórmulas de primer orden para las que no es deducible la validez universal ni la existencia de un contraejemplo.

análogo ocurre también con los otros sistemas formales, como el sistema axiomático de conjuntos de Zermelo-Fraenkel[3].

III. El teorema I puede ser aún reforzado, en el sentido de que ni siquiera añadiendo un número finito de axiomas (o una infinidad que resulte de un número finito mediante «elevación de tipo») al sistema *S* obtenemos un sistema completo, mientras el sistema ampliado siga siendo ω-consistente. Que un sistema formal sea ω-consistente significa aquí que no hay ninguna propiedad numérica *F* para la que podamos deducir tanto $F1$, $F2$, ..., Fn, ..., ad infinitum como $\exists x \neg Fx$. (Hay extensiones del sistema *S* que son consistentes, pero no ω-consistentes.)

IV. El teorema I sigue valiendo para todas las extensiones ω-consistentes del sistema *S* que resulten de añadirle una infinidad de axiomas, mientras la clase de axiomas añadidos sea decidible, es decir, mientras para cada fórmula sea metamatemáticamente decidible si es un axioma o no (y aquí suponemos que en la metamatemática disponemos otra vez de los medios lógicos de *Principia Mathematica*).

Los teoremas I, III y IV pueden extenderse también a otros sistemas formales, como por ejemplo a la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, con tal de que tales sistemas sean ω-consistentes.

Las pruebas de estos teoremas aparecerán en *Monatshefte für Mathematik und Physik*.

---

[3] Este resultado vale en especial también para el sistema axiomático de la matemática clásica, tal como ha sido construido, por ejemplo, por J. von Neumann (1927).

Introducción a:
Sobre sentencias formalmente indecidibles de principia mathematica y sistemas afines

El programa formalista de Hilbert requería la completa formalización de la matemática clásica. Sus conceptos habían de ser reemplazados por signos gráficos, sus ideas por hileras de signos, el razonamiento por la mera manipulación combinatoria de las hileras y la demostración por la deducción formal conforme a reglas mecánicas.

Con esto podríamos olvidarnos del contenido transfinito presuntamente problemático de la matemática clásica y limitarnos a inspeccionar desde fuera el juego con hileras de signos, restringiendo ahora nuestros razonamientos a lo más evidente y menos problemático, a lo finitario.

Mediante razonamientos externos y finitarios acerca de las posibilidades combinatorias de las hileras finitas de signos había que probar que el juego no era peligroso, es decir, que jugando a él no podía caerse en contradicción alguna. En resumen, el programa formalista de Hilbert requería dos cosas: (1) construir sistemas formales completos para las principales teorías de la matemática clásica, y (2) probar la consistencia de dichos sistemas formales.

En un sistema formal tenemos en primer lugar un conjunto enumerable de signos primitivos, que determina el conjunto de sus hileras o secuencias finitas de signos (con posibles repeticio-

nes). En segundo lugar tenemos ciertas reglas combinatorias, que determinan cuáles hileras son fórmulas. El conjunto de las fórmulas constituye el lenguaje formal del sistema. En tercer lugar tenemos otras reglas combinatorias, que determinan cuáles secuencias de fórmulas constituyen deducciones. Una sentencia es una fórmula sin variables libres. Una sentencia es deducible si constituye el último miembro de (una secuencia de fórmulas que es) una deducción. El conjunto de las sentencias deducibles constituye una teoría formalizada.

Un sistema formal S es *completo* si y sólo si para cada sentencia φ de su lenguaje formal ocurre que φ es deducible en S o que *no*-φ es deducible en S. Así pues, un sistema formal completo no deja pregunta (representable en su lenguaje formal) sin respuesta. Con su ayuda pueden decidirse todas las cuestiones pertinentes. Basta con deducir y deducir... hasta llegar a φ o a *no*-φ. Es seguro que a una de las dos llegaremos. Todos los problemas planteados en un sistema formal completo son decidibles.

Un sistema formal S es *incompleto* si y sólo si hay alguna sentencia φ, tal que ni φ es deducible en S, ni tampoco lo es *no*-φ. Por tanto, hay problemas planteables en S para los que S no ofrece solución, hay problemas indecidibles en S.

Un sistema formal S es *consistente* si y sólo si hay alguna sentencia de su lenguaje formal que no es deducible en S (o, equivalentemente, si para ninguna sentencia φ ocurre que tanto φ como *no*-φ sean deducibles en S).

Un sistema formal S es *inconsistente* o contradictorio si y sólo si toda sentencia del lenguaje formal de S es deducible en S (o, equivalentemente, si hay alguna sentencia φ del lenguaje formal de S, tal que tanto φ como *no*-φ son deducibles en S).

Aunque un sistema formal incompleto puede, sin embargo, ser de gran utilidad teórica, un sistema formal inconsistente es absolutamente absurdo e inútil.

Una teoría definida semánticamente (como el conjunto de las sentencias verdaderas en un modelo determinado) es siempre completa y consistente. Y si pretendemos que un sistema formal (como la aritmética formalizada) refleje perfectamente una teoría definida semánticamente (como la aritmética natural), entonces es preciso que el sistema formal sea completo y consistente. Por

otro lado, si pretendemos probar la consistencia de un sistema formal de un modo satisfactorio, es preciso que los razonamientos empleados en la prueba de consistencia sean más simples o débiles o seguros que los incorporados en el sistema formal mismo o, en cualquier caso, no más potentes y arriesgados.

Hacia 1930 la situación del programa formalista de Hilbert era más o menos la siguiente. Se pensaba que el primer requerimiento (formalización completa de la matemática clásica) había sido ya básicamente cumplido con la construcción del sistema formal de *Principia Mathematica* y otros comparables (como la teoría axiomática de conjuntos suplementada por un cálculo lógico, etc.). Y por esta fecha muchos matemáticos y lógicos trataban de cumplir el segundo requerimiento (es decir, trataban de probar la consistencia del sistema formal). Como la tarea parecía difícil, se trataba de empezar por lo más fácil, por probar la consistencia de algún sistema formal de la aritmética.

El año 1931 se publicó el artículo más famoso de Gödel y quizá de la historia entera de la lógica. Sus resultados mostraban la imposibilidad de llevar a cabo el programa de Hilbert. En primer lugar Gödel probaba que todos los sistemas formales de la matemática clásica (incluidos el de *Principia Mathematica*, la aritmética formal de Peano, la teoría axiomática de conjuntos, etcétera, y, en general, cualquier sistema formal que cumpliese ciertas condiciones de aceptabilidad) son incompletos, es decir, que para cada uno de ellos puede efectivamente construirse una sentencia indecidible (tal que ni ella ni su negación es deducible). Además, esta incompletud no tiene remedio. Por muchos axiomas que añadamos, los sistemas formales siguen siendo incompletos. En segundo lugar Gödel demostraba que es imposible probar la consistencia de un sistema formal (que cumpla ciertas mínimas condiciones de aceptabilidad) de la matemática clásica, incluso utilizando todos los recursos y razonamientos incorporados en el sistema, es decir, que es imposible demostrar la consistencia de un sistema formal dentro del mismo. Naturalmente, sigue siendo posible probar su consistencia desde una teoría más potente que el propio sistema formal, pero eso sería de dudosa utilidad.

Los resultados de Gödel cayeron como una bomba, a pesar de que él mismo trató de dorar la píldora, indicando posibles

salidas. Además, el carácter efectivo y constructivo de sus pruebas, admisibles para todos los lógicos y matemáticos, incluso para los intuicionistas, hizo que éstas fueran aceptadas de inmediato. Ni la lógica ni la filosofía de la matemática volverían ya nunca a ser lo que fueron. Una cierta ingenuidad y un cierto optimismo habían desaparecido para siempre.

La formalización y los sistemas formales dejaban de ser una panacea filosófica y sus posibilidades y limitaciones intrínsecas pasaban a convertirse en objeto de estudio riguroso para una metamatemática que acababa de alcanzar su madurez.

Gödel llevó a cabo sus pruebas planteando y resolviendo los problemas metamatemáticos dentro de la aritmética. Por un ingenioso procedimiento, Gödel asignó números naturales a las hileras (y secuencias de hileras) del sistema formal y relaciones numéricas a las relaciones metamatemáticas. Establecido así un isomorfismo entre el sistema formal y cierto sistema numérico, Gödel se movió con gran habilidad entre ambos, jugando con el doble hecho de que, por un lado, toda afirmación metamatemática sobre el sistema formal tenía un correlato numérico y de que, por otro lado, toda afirmación numérica pertinente podía ser expresada por una fórmula del sistema formal. Así era posible contruir una sentencia φ que, naturalmente interpretada, decía que un cierto número n tenía una cierta propiedad P. Pero ese número era el número correspondiente a la fórmula φ, y esa propiedad era la propiedad numérica correspondiente a la propiedad metamatemática de no ser deducible. Por tanto, la sentencia φ, naturalmente interpretada, afirmaba su propia indeducibilidad. Bordeando la paradoja del mentiroso, pero sin caer en ella (la sentencia φ es a la vez verdadera e indeducible, y en ello no hay paradoja alguna, aunque sí sorpresa), Gödel prueba que ni φ ni no-φ pueden ser deducibles en el sistema formal, que, por tanto, es incompleto. De modo análogo prueba que es imposible deducir la fórmula que, naturalmente interpretada, afirma la consistencia del sistema.

En sus correrías aritméticas Gödel se limita básicamente a una clase especialmente manejable de relaciones y funciones numéricas: las relaciones y funciones recursivas primitivas, definidas por primera vez en este artículo y cuyo estudio daría lugar más tarde a la teoría de la recursión.

El artículo se divide en cuatro partes.

La *primera parte* constituye una presentación informal y resumida del teorema de incompletud y del camino seguido para llegar a él.

La *segunda parte* del artículo comienza con la descripción detallada del sistema formal *P*, que va a servir de base a sus demostraciones y que esencialmente consiste en la unión de la lógica de *Principia Mathematica* con los axiomas de Peano. La lógica de *Principia Mathematica* es una lógica de tipos, que distingue variables de cada tipo. En el sistema *P* se fija la interpretación de las variables de una vez por todas: las variables de tipo 1 se referirán a números naturales, las de tipo 2 a clases de números naturales, las de tipo 3 a clases de clases de números naturales, etc. Esta fijación, junto con el añadido de los axiomas de Peano, convierte a *P* en un sistema interpretado. Por tanto, siempre hay una interpretación natural de cada fórmula de *P*, conforme a la cual cada fórmula, si bien es una mera hilera o fila de signos, tiene un contenido, expresa una idea (verdadera o falsa) sobre los números naturales.

A continuación Gödel introduce un procedimiento para codificar numéricamente la metateoría del sistema formal *P*. A una tal codificación se le llama desde entonces una gödelización, y el número asignado a una entidad sintáctica se llama su número de Gödel. Gödel asigna biunívocamente números naturales a cada signo primitivo de *P*, a cada hilera de signos de *P*, a cada fórmula de *P* y a cada sucesión de fórmulas de *P*, con lo que cada entidad sintáctica queda representada por un cierto número natural.

Dada una hilera o una secuencia de hileras cualquiera, podemos computar efectivamente su número de Gödel. Y dado un número natural cualquiera, podemos decidir si es el número de Gödel de alguna hilera o secuencia de hileras de *P* y, en caso afirmativo, podemos computar y escribir la correspondiente hilera o sucesión de hileras.

Esta representación numérica de las entidades sintácticas determina una serie de relaciones y funciones numéricas que corresponde exactamente a las relaciones y funciones metamatemáticas.

Así, a la propiedad metamatemática de ser un axioma corresponde la propiedad numérica de ser el número de Gödel de un axioma. A la relación metamatemática en que está una fórmula con otras dos cuando es inferible de ellas mediante la regla del *modus ponens* (que permite inferir β de $\alpha \rightarrow \beta$ y α) corresponde la relación numérica en que está un número natural *n* con otros dos *m* y *p* cuando *n* es el número de Gödel de una fórmula inferible por *modus ponens* de otras dos fórmulas cuyos números de Gödel son *m* y *p*.

Gödel introduce aquí una disgresión para definir la clase de las funciones numéricas recursivas primitivas. Aunque funciones de este tipo habían sido usadas por otros autores, Gödel dio aquí su primera definición explícita (funciones obtenidas por composición y recursión a partir de ciertas funciones iniciales triviales), que se ha hecho clásica. Una relación numérica *R* es recursiva primitiva si y sólo si lo es su correspondiente función característica (es decir, la función f_R tal que $R\ x_1, \ldots, x_n \leftrightarrow f_R(x_1, \ldots, x_n) = 0$ para cualesquiera números $x_1, \ldots, x_n$). Luego prueba cuatro teoremas sobre funciones y relaciones recursivas primitivas.

Seguidamente, Gödel define 46 relaciones y funciones numéricas, 41 de las cuales corresponden a otras tantas nociones metamatemáticas. Con frecuencia, Gödel designa la noción numérica correspondiente a una noción metamatemática con el nombre de esta última, escrito en versalitas (en el original, en un tipo especial de cursiva). Así, «NEGACION» es el nombre de la función numérica que asigna a cada número de Gödel de una hilera el número de Gödel de la hilera que resulta de anteponer a la primera el signo de negación. Gödel prueba que las 45 primeras relaciones son recursivas primitivas, pero la última no lo es. La última es la propiedad numérica de ser una FORMULA DEDUCIBLE, es decir, la propiedad que tiene un número natural si y sólo si es el número de Gödel de una fórmula deducible.

El sistema formal *P* dispone de signos para el número 0 y para la función del siguiente; con ello dispone de signos compuestos (términos) para cada número natural. Sea $\bar{\text{m}}$ el término de *P* que en la interpretación natural se refiere al número natural *m*. Una relación numérica *n*-aria *R* es *representable en P* si y sólo si hay una fórmula $\varphi(\text{x}_1, \ldots, \text{x}_n)$ de *P* tal que si los números

naturales m_1, ..., m_n están en la relación R, entonces la fórmula $\varphi(\bar{m}_1, ..., \bar{m}_n)$ es deducible en P, y si los números m_1, ..., m_n no están en la relación R, entonces la negación de $\varphi(\bar{m}_1, ..., \bar{m}_n)$ es deducible en P. En el teorema V prueba Gödel que *cada relación numérica recursiva primitiva es representable en P.*

Un conjunto Γ de fórmulas del lenguaje de P se llama ω-consistente si y sólo si no hay ninguna fórmula $\varphi(x)$ tal que, por un lado, para todo número natural m, $\varphi(\bar{m})$ es deducible de Γ y, por otro lado, también $\neg\forall x\ \varphi(x)$ es deducible de Γ.

El teorema VI constituye el famoso *teorema de incompletud* de Gödel: Dice que *en el sistema P* (aunque lo completemos con cualquier clase recursiva primitiva y ω-consistente K de nuevos axiomas) *hay siempre alguna sentencia tal que ni ella ni su negación es deducible en el sistema.*

Gödel prueba el teorema VI construyendo efectivamente una sentencia indecible, la correspondiente al número de Gödel (17 Gen r), donde r puede ser efectivamente computado. Se trata de una sentencia que, naturalmente interpretada, afirma de sí misma que no es deducible.

Gödel prueba que (1) si $P \cup K$ es consistente, entonces esa sentencia indecidible, la correspondiente al número de Gödel (17 Gen r), donde r puede ser efectivamente computado. Se trata de una sentencia que, naturalmente interpretada, afirma de sí misma que no es deducible.

La ω-consistencia es una exigencia más fuerte que la mera consistencia, a la que implica. Esencialmente prohíbe que afirmemos una cierta propiedad de cada número natural por separado y al mismo tiempo neguemos que la tengan todos los números naturales. Evidentemente, todo conjunto ω-consistente de fórmulas es en especial consistente a secas, pero no todo conjunto consistente es ω-consistente. En 1936, siguiendo los pasos de Gödel, pero construyendo una sentencia indecidible más complicada, Barkley Rosser logró reducir la exigencia de ω-consistencia en (2) a la de mera consistencia. Por tanto, hoy sabemos que todo sistema formal consistente y algo expresivo (es decir, en el que sean definibles las funciones recursivas primitivas) es incompleto.

Gödel concluye esta segunda parte haciendo varias importantes observaciones sobre su prueba del teorema de incomple-

tud: que la prueba es constructiva (intuicionistamente aceptable); que la prueba sigue valiendo aunque añadamos el axioma de elección y la hipótesis del continuo al sistema formal considerado; y que el teorema de incompletud es válido para todos los sistemas formales algo expresivos conocidos, incluyendo la teoría axiomática de conjuntos y la aritmética de Peano.

La *tercera parte* del artículo está dedicada a exponer otros resultados complementarios de indecibilidad, que refuerzan los ya obtenidos en la segunda.

Gödel introduce aquí la noción de clase, relación y sentencia aritmética. Por ejemplo, una clase A de números naturales es *aritmética si y sólo si* hay una fórmula de primer orden $\varphi(x)$ construida con las solas constantes extralógicas 0, *s*, +, . , y tal que para cada número natural *n* vale: $n \in A$ si y sólo si $\varphi(\bar{n})$ es verdad (en la interpretación natural). En definitiva, las clases y relaciones aritméticas son las clases y relaciones numéricas definibles mediante fórmulas de primer orden y usando sólo las nociones de *cero*, *siguiente*, *suma* y *producto*. Evidentemente, no todas las clases y relaciones numéricas son aritméticas. De hecho, la mayoría no lo son, pues hay una infinidad innumerable de clases y relaciones de números naturales, mientras que sólo hay una infinidad numerable de fórmulas.

Gödel formula y prueba el teorema VII: *Cada relación recursiva primitiva es aritmética.* De ahí se sigue como un corolario el teorema VIII: *En cada sistema formal* (considerado) *hay sentencias aritméticas indecidibles.* En efecto, la sentencia indecidible construida por Gödel en la prueba del teorema VI tenía la forma $\forall x\, Bx$, donde *B* era un predicado recursivo primitivo y por tanto aritmético. Luego hay una fórmula $\varphi(x)$ de primer orden con las solas constantes extralógicas 0, *s*, +, ·, , tal que $\forall x\, \varphi(x)$ es una sentencia aritmética equivalente a la sentencia indecidible dada y, por consiguiente, ella misma indecidible.

Después de probar que los sistemas formales considerados no sólo son incompletos, sino que ni siquiera sirven para decidir cada cuestión aritmética elemental (expresable en una sentencia aritmética), pasa a mostrar que tampoco sirven para decidir la validez de una fórmula de la lógica pura (es decir, una fórmula sin constantes extralógicas y con sólo variables individuales y

predicativas) de primer orden. Gödel demuestra el teorema X: *Cada problema de la forma* $\forall x\ Bx$ (*con B recursivo primitivo*) *es reducible al problema de determinar si una cierta fórmula de la lógica pura de primer orden es satisfacible o no.* De aquí se sigue como corolario el teorema IX: *En cada sistema formal* (*considerado*) *hay fórmulas indecidibles de la lógica pura de primer orden.* En efecto, sólo las fórmulas válidas de la lógica pura son deducibles. Si todas las fórmulas de la lógica pura fuesen decidibles en el sistema formal, podríamos decidir cuándo son válidas y, por tanto, cuándo son satisfacibles (a saber, cuando su negación no es válida). Pero, por el teorema X, eso nos permitiría decidir cada cuestión de la forma $\forall x\ Bx$ (con B recursivo primitivo), y por tanto decidir en el sistema formal la sentencia en él indecidible, construida por Gödel (y que tenía esta forma), lo cual es imposible.

La *cuarta* y última *parte* del artículo está dedicada a esbozar la prueba de un descubrimiento sorprendente de Gödel, expuesto como teorema XI: *Si un sistema formal* (de los considerados) *es consistente, entonces es imposible probar formalmente su consistencia con sus propios medios, es decir, es imposible deducir en él la sentencia que dice que es consistente.*

En la prueba del teorema VI, en la sección segunda, Gödel había probado mediante razonamientos aritméticos elementales que si el sistema formal es consistente, entonces la sentencia –llamémosla φ– cuyo número de Gödel es (17 Gen r) no es deducible. Pero φ dice, en la interpretación natural, que ella misma no es deducible, lo cual es verdad. Por tanto, Gödel había probado que si el sistema formal es consistente, entonces φ es verdad. Sea σ la fórmula que, en la interpretación natural, dice que el sistema formal es consistente (es decir, que una determinada fórmula, por ejemplo $x \neq x$, no es deducible en él). Los razonamientos aritméticos elementales usados por Gödel pueden formalizarse en el sistema formal. Por tanto, en el sistema formal puede deducirse la fórmula $\sigma \rightarrow \varphi$, que en la interpretación natural dice que si el sistema formal es consistente, entonces φ es verdad. Ahora bien, si pudiéramos deducir la sentencia σ, entonces podríamos también deducir (por la regla de inferencia de *modus ponens*) la sentencia φ. Pero habíamos probado que si

el sistema formal es consistente, entonces φ no es deducible. Por tanto, si el sistema formal es consistente, tampoco será deducible σ, es decir, no será deducible la sentencia que, en la interpretación natural, dice que el sistema formal es consistente. Si el sistema formal es contradictorio podemos deducir (en él) cualquier cosa, tanto que es consistente como que no lo es. Pero si el sistema formal es consistente, entonces no podemos deducir (en él) que lo es.

Consciente de lo sorprendente del teorema XI, Gödel se había propuesto escribir pronto una continuación, donde lo demostraría con todo detalle, y así lo anuncia al final. De todos modos, esa continuación nunca llegó a escribirse, pues Gödel lo consideró innecesario, ya que la aceptación de sus teoremas fue general e inmediata.

El artículo aquí comentado fue escrito por Gödel en 1930 y enviado para su publicación a la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik*, que lo recibió el 17 de noviembre de 1930 y lo publicó en 1931 en las páginas 173-198 de su número 38 bajo el título *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines). El artículo ha sido traducido al inglés tres veces, por B. Meltzer, por E. Mendelson (en Davis (1965), págs. 5-38) y por J. van Heijenoort (en van Heijenoort (1967), págs. 597-616). La traducción inglesa de J. van Heijenoort –que es la mejor y más cuidadosa– contiene una nota suplementaria, añadida por Gödel el 28 de agosto de 1963, que hemos incorporado a nuestra traducción.

J. M.

Jesús Mosterín.

SOBRE SENTENCIAS FORMALMENTE INDECIDIBLES DE PRINCIPIA MATHEMATICA Y SISTEMAS AFINES[1]

Como es bien sabido, el progreso de la matemática hacia una exactitud cada vez mayor ha llevado a la formalización de amplias partes de ella, de tal modo que las deducciones pueden llevarse a cabo según unas pocas reglas mecánicas. Los sistemas formales más amplios construidos hasta ahora son el sistema de *Principia Mathematica* (*PM*)[2] y la teoría axiomática de conjuntos[3] de Zermelo-Fraenkel (desarrollada aún más por J. von Neumann).

Estos dos sistemas son tan amplios que todos los métodos

[1] Véase el resumen de los resultados de este trabajo aparecido en *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien* (*math-naturw. Kl.*), 1930, núm. 67.

[2] A. Whitehead y B. Russell: *Principia Mathematica*, segunda edición, Cambridge, 1925. Entre los axiomas del sistema *PM* incluimos también el axioma de infinitud (en la forma: hay exactamente una cantidad infinita numerable de individuos), el axioma de reducibilidad y el axioma de elección (para todos los tipos).

[3] Véase A. Fraenkel: Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, *Wissenschaft und Hyp.*, Band XXXI; J. von Neumann: Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Math. Zeitschrift*, 27, 1928. *Journal für reine und angewandte Mathematik* 154 (1925), 160 (1929). Indiquemos que para completar la formalización es preciso añadir los axiomas y reglas de inferencia del cálculo lógico a los axiomas conjuntistas presentados en la bibliografía citada. Las

usados hoy en la matemática pueden ser formalizados en ellos, es decir, pueden ser reducidos a unos pocos axiomas y reglas de inferencia. Resulta por tanto natural la conjetura de que estos axiomas y reglas basten para decidir *todas* las cuestiones matemáticas que puedan ser formuladas en dichos sistemas. En lo que sigue se muestra que esto no es así, sino que, por el contrario, en ambos sistemas hay problemas relativamente simples de la teoría de los números naturales[4] que no pueden ser decididos con sus axiomas (y reglas). Este hecho no se debe a la especial naturaleza de los sistemas citados, sino que se da en una clase muy amplia de sistemas formales, a la que en especial pertenecen todos los que resultan de añadir un número finito de axiomas[5] a los dos sistemas citados, suponiendo que ningún enunciado falso del tipo indicado en la nota 4 resulte deducible por el añadido de los nuevos axiomas.

Antes de entrar en detalles vamos a esbozar la idea principal de la prueba, aunque naturalmente sin pretensiones de exactitud. Las fórmulas de un sistema formal (aquí nos limitamos al sistema *PM*), externamente consideradas, son secuencias finitas de signos primitivos (variables, constantes lógicas y paréntesis o signos de puntuación) y se puede precisar fácilmente qué filas de signos primitivos son fórmulas y cuáles no[6]. Análogamente, desde un punto formal las deducciones no son sino secuencias finitas de fórmulas (con ciertas propiedades explicitables). Para las consideraciones metamatemáticas resulta indiferente qué obje-

---

siguientes consideraciones son igualmente aplicables a los sitemas formales construidos en los últimos años por D. Hilbert y sus colaboradores (en la medida en que han sido dados a conocer).

[4] Más precisamente, hay sentencias indecidibles, en las que, además de las constantes lógicas $\neg$ (no), $\vee$ (o), $\forall$ (para todo) y $=$ (idéntico a), no aparecen más nociones que $+$ (adición) y $\cdot$ (multiplicación), ambas referidas a números naturales, y en las que los prefijos $\forall x$ también se refieren sólo a números naturales.

[5] Sólo consideramos como axiomas distintos de *PM* aquellos que no resultan unos de otros por mero cambio de tipo.

[6] Aquí y en lo sucesivo entendemos siempre por «fórmula de *PM*» una fórmula escrita sin abreviaturas (es decir, sin hacer uso de las definiciones). Las definiciones sólo sirven para abreviar la escritura y por tanto son en principio superfluas.

tos usemos como signos primitivos. Usemos números naturales[7] como tales signos. Consiguientemente, una fórmula será una secuencia finita de números naturales[8] y una deducción será una secuencia finita de secuencias finitas de números naturales. Los conceptos (o enunciados) metamatemáticos se convierten así en conceptos (respectivamente, enunciados) sobre números naturales o sucesiones de números naturales[9] y por tanto pueden ser (al menos en parte) expresados con los símbolos del sistema *PM*. En particular se puede mostrar que los conceptos «fórmula», «deducción» y «fórmula deducible» son definibles en el interior del sistema *PM*. Por ejemplo, se puede ofrecer[10] una fórmula $\varphi(\mathrm{v})$ de *PM* con una variable v (del tipo de una secuencia de números), tal que $\varphi(\mathrm{v})$, interpretada, dando a los signos de *PM* su significado intuitivo, dice: v es una fórmula deducible. Ahora construimos una sentencia indecidible del sistema *PM*, es decir, una sentencia α, tal que ni α ni *no*-α es deducible, del siguiente modo:

Llamemos *signo de clase* a una fórmula de *PM* con exactamente una variable libre del tipo de los números naturales (clase de clases). Supongamos que los signos de clase estén ordenados de alguna manera[11] en una sucesión, designemos su miembro *n*-avo mediante $R(n)$ y observemos que el concepto «signo de clase» al igual que la relación ordenante R pueden ser definidos en el sistema *PM*. Sea α un signo de clase cualquiera; mediante $[\alpha; n]$ *designamos la fórmula que resulta de sustituir la variable libre por el signo que denota el número natural n* en el signo de

[7] Es decir, asignamos biunívocamente números naturales a los signos primitivos. (Véase cómo lo hacemos en la página 63.)

[8] Es decir, una asignación de números naturales a un segmento inicial de la serie de los números naturales. (Desde luego, los números no pueden ser espacialmente ordenados.)

[9] Con otras palabras: el procedimiento antes descrito proporciona una imagen isomorfa del sistema *PM* en el dominio de la aritmética, y todas las argumentaciones metamatemáticas pueden ser igualmente referidas a esa imagen isomorfa. Esto es lo que sucede en el siguiente esbozo de prueba, donde por «fórmula», «sentencia», «variable», etc., *siempre hemos de entender los objetos correspondientes de la imagen isomorfa.*

[10] Sería muy fácil (aunque bastante pesado) escribir de hecho esa fórmula.

[11] Por ejemplo, según la suma creciente de sus miembros y, caso de que la suma sea igual, lexicográficamente.

clase α. También la relación ternaria $x=[y; z]$ resulta ser definible en *PM*. Ahora definimos una clase *K* de números naturales del siguiente modo:

$$(1) \qquad n \in K \leftrightarrow \neg\, Bew\ [R(n); n]$$

(donde *Bew x* significa: *x* es una fórmula deducible). Puesto que todos los conceptos que aparecen en el definiens son definibles en *PM*, también lo es el concepto compuesto de ellos *K*, es decir, hay un signo de clase σ[12] tal que la fórmula $[\sigma; n]$, interpretada de acuerdo con el significado intuitivo de sus signos, dice que el número natural *n* pertenece a *K*. Puesto que σ es un signo de clase, es idéntico con cierto $R(q)$, es decir, ocurre que

$$\sigma = R(q)$$

para cierto número natural *q*. Ahora mostramos que la sentencia$[R(q); q]$[13] es indecidible en *PM*. Pues si suponemos que la sentencia $[R(q); q]$ fuera deducible, entonces sería verdadera; en ese caso, y de acuerdo con lo antes dicho, *q* pertenecería a *K*, es decir, por (1) valdría que $\neg\, Bew\ [R(q); q]$, en contradicción con el supuesto. Si, por el contrario, la negación de $[R(q); q]$ fuese deducible, entonces ocurriría que $q \notin K$, es decir, valdría que *Bew* $[R(q); q]$. Así, tanto $[R(q); q]$ como su negación serían deducibles, lo que de nuevo es imposible.

La analogía de esta argumentación con la antinomia de Richard salta a la vista; también está íntimamente relacionada con la paradoja del «mentiroso»[14], pues la sentencia indecidible $[R(q); q]$ dice que *q* pertenece a *K*, es decir, según (1), que $[R(q); q]$ no es deducible. Así pues, tenemos ante nosotros una sentencia que afirma su propia indeducibilidad[15]. Evidentemente

---

[12] De nuevo no habría dificultad ninguna en escribir de hecho la fórmula σ.

[13] Obsérvese que «$[R(q); q]$» (o, lo que significa lo mismo, «$[\sigma; q]$») es meramente una descripción metamatemática de la sentencia indecidible. Pero tan pronto como se ha obtenido la fórmula σ se puede determinar el número *q*, y con ello escribir efectivamente la sentencia indecidible.

[14] Cualquier antinomia epistemológica podría ser usada para obtener una prueba similar de la existencia de sentencias indecidibles.

[15] Frente a lo que podría parecer, un tal enunciado no tiene nada de circular,

el método de prueba que acabamos de exponer es aplicable a cualquier sistema formal que, en primer lugar, interpretado naturalmente, disponga de medios de expresión suficientes para definir los conceptos que aparecen en la argumentación anterior (especialmente el concepto de «fórmula deducible») y en el cual, en segundo lugar, cada fórmula deducible sea verdadera en la interpretación natural. Uno de los propósitos del desarrollo exacto de la prueba indicada, que a continuación ofreceremos, consiste en sustituir la segunda de las citadas condiciones por otra puramente formal y mucho más débil.

De la observación de que $[R(q); q]$ dice de sí misma que no es deducible se sigue inmediatamente que $[R(q); q]$ es verdadera, pues $[R(q); q]$ no es deducible (ya que no es decidible). La sentencia indecidible *en el sistema PM* ha sido, pues, finalmente decidida mediante consideraciones metamatemáticas. El análisis preciso de esta extraña situación conduce a resultados sorprendentes respecto a las pruebas de consistencia de sistemas formales, resultados que serán tratados más detenidamente en la sección 4 (teorema XI).

2

Pasemos ahora a desarrollar con toda exactitud la prueba que acabamos de esbozar. En primer lugar ofrecemos una descripción precisa del sistema formal *P*, para el cual vamos a probar la existencia de sentencias indecidibles. *P* es esencialmente el sistema que se obtiene cuando a los axiomas de Peano se añade la lógica de *PM*[16] (con los números como individuos y la relación del siguiente como concepto primitivo indefinido).

---

pues se limita a afirmar que una fórmula determinada (a saber, la obtenida mediante cierta sustitución a partir de la fórmula q-ava según el orden lexicográfico) no es deducible. Sólo posteriormente (y, por así decir, por casualidad) resulta que esta fórmula es precisamente aquella que expresa ese mismo enunciado.

[16] El añadido de los axiomas de Peano, así como todas las otras modificaciones del sistema *PM* aquí introducidas, sólo sirven para simplificar la prueba y en principio son prescindibles.

Los signos primitivos del sistema *P* son los siguientes:

I. Constantes: «$\sim$» (no), «$\vee$» (o), «Π» (para todo), «0» (cero), «s» (el siguiente de), «(»,«)» (paréntesis).

II. Variables de tipo 1 (para individuos, es decir, para números naturales, incluyendo el 0): «x_1», «y_1», «z_1», ...

Variables de tipo 2 (para clases de individuos): «x_2», «y_2», «z_2», ...

Variables de tipo 3 (para clases de clases de individuos): «x_3», «y_3», «z_3», ...,

etc., para cada número natural como tipo[17].

Observación: No necesitamos disponer de variables para relaciones binarias o *n*-arias ($n > 2$) como signos primitivos, pues podemos definir las relaciones como clases de pares ordenados y los pares ordenados a su vez como clases de clases, por ejemplo, el par ordenado $<a, b>$ como $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, donde $\{x, y\}$ denota la clase cuyos únicos elementos son *x* e *y*, y $\{x\}$ la clase cuyo único elemento es *x*[18].

Por *signo del primer tipo* entendemos una combinación de signos que tenga una de las siguientes formas:

a, sa, ssa, sssa, ..., etc.,

donde a es 0 ó es una variable de tipo 1. En el primer caso llamamos a tal signo un numeral. Para $n > 1$ entendemos por *signo de tipo n* lo mismo que por *variable de tipo n.* Llamaremos *fórmulas elementales* a las combinaciones de signos de la forma a(b), donde b es un signo de tipo *n*, y a es un signo de tipo $n+1$. Definimos[19] la clase de las *fórmulas* como la mínima clase que

[17] Suponemos que disponemos de una cantidad infinita numerable de signos para cada tipo de variables.

[18] Las relaciones no homogéneas también pueden definirse de esta manera; por ejemplo, una relación entre individuos y clases puede definirse como una clase de elementos de la forma $\{\{x_2\}, \{\{x_1\}, x_2\}\}$. Todos los teoremas sobre relaciones deducibles en *PM* son también deducibles cuando se los reformula de esta manera, como fácilmente se ve.

[19] Respecto a esta definición (y a otras posteriores similares), véase J. Lukasiewicz y A. Tarski: Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, XVIII, 1930, Cl. III.

abarca todas las fórmulas elementales y que, siempre que contiene α y β, contiene también $\sim(\alpha)$, $(\alpha) \vee (\beta)$ y $\Pi x(\alpha)$ (donde x es una variable cualquiera)[19a]. Llamamos a $(\alpha) \vee (\beta)$ la *disyunción* de α y β, a $\sim(\alpha)$ la *negación* de α y a $\Pi x(\alpha)$ una *generalización* de α. Una *sentencia* es una fórmula sin variables libres (donde la noción de variable libre se define del modo usual). A una fórmula con exactamente *n* variables individuales libres (y ninguna otra variable libre) vamos a llamarla *signo relacional n-ario*; para $n = 1$, la llamaremos también *signo de clase*.

Por $\mathrm{S}_v^b \alpha$ (donde α designa una fórmula, v una variable y b un signo del mismo tipo que v) entendemos la fórmula que resulta de reemplazar en α cada aparición libre de v por b[20]. Decimos que una fórmula α es una *elevación de tipo* de otra fórmula β si α se obtiene a partir de β mediante la elevación por el mismo número de cada variable que aparece en β.

Las siguientes fórmulas (I a V) se llaman *axiomas* (están escritas con ayuda de las abreviaturas: $\wedge$, $\supset$, $\equiv$, Σ, $=$[21], definidas del modo usual y conforme a las convenciones habituales sobre la omisión de paréntesis)[22]:

I. 1. $\sim(sx_1 = 0)$
   2. $sx_1 = sy_1 \supset x_1 = y_1$
   3. $x_2(0) \wedge \Pi x_1 \, (x_2 \, (x_1) \supset x_2 \, (sx_1)) \supset \Pi x_1 \, (x_2 \, (x_1))$.

II. Cada fórmula que resulta de sustituir X, Y por cualesquiera fórmulas en los siguientes esquemas:

[19a] Por tanto, $\Pi x(\alpha)$ también es una fórmula cuando x no aparece o no está libre en α. Naturalmente, en ese caso $\Pi x(\alpha)$ significa lo mismo que α.

[20] Si v no aparece libre en α, entonces $\mathrm{S}_v^b \, \alpha = \alpha$. Nótese que S es un signo metamatemático.

[21] Como en *PM*, I, * 13, consideramos que $x_1 = y_1$ está definido por $\Pi x_2(x_2(x_1) \supset x_2(y_1))$; de igual modo para los tipos superiores.

[22] Para obtener los axiomas a partir de los esquemas indicados debemos (después de realizar las sustituciones permitidas en II, III y IV), además,
(1) eliminar las abreviaturas
(2) añadir los paréntesis omitidos.
Nótese que las expresiones así obtenidas deben ser «fórmulas» en el sentido arriba definido. (Véanse también las definiciones exactas de los conceptos metamatemáticos en las págs. 67 y ss.)

1. $X \vee X \supset X$.
2. $X \supset X \vee Y$.
3. $X \vee Y \supset Y \vee X$.
4. $(X \supset Y) \supset (Z \vee X \supset Z \vee Y)$.

III. Cada fórmula que resulta de uno de estos dos esquemas:

1. $\Pi v \alpha \supset \mathop{\Subset}{}^{c}_{v}\, \alpha$.
2. $\Pi v(\beta \vee \alpha) \supset \beta \vee \Pi v(\alpha)$

cuando sustituimos α, v, β, c del siguiente modo (y realizamos la operación indicada por «$\Subset$» en 1.):

Sustituimos α por una fórmula cualquiera, v por una variable cualquiera, β por una fórmula en la que no aparezca libre v y c por un signo del mismo tipo que v, siempre que c no contenga alguna variable que pase a estar ligada en un lugar de α donde v estaba libre[23].

IV. Cada fórmula que resulta del esquema:

1. $\Sigma u\, \Pi v(u(v) \equiv \alpha)$

cuando sustituimos v por una variable cualquiera de tipo n, sustituimos u por una variable cualquiera de tipo $n+1$ y sustituimos α por una fórmula, en la que u no esté libre. Este axioma desempeña el papel del axioma de reducibilidad (el axioma de comprensión de la teoría de conjuntos).

V. Cada fórmula que resulta de

1. $\Pi x_1 (x_2(x_1) \equiv y_2(x_1)) \supset x_2 = y_2$

por elevación de tipo (así como esta fórmula misma). Este axioma dice que una clase está completamente determinada por sus elementos.

---

[23] Por tanto, c es o una variable o el 0 o un signo de la forma s ... su, donde u es 0 o una variable de tipo 1. Respecto de la noción de estar (una variable) libre o ligada en un lugar de α, véase I A 5 en el trabajo citado en la nota 24.

Una fórmula γ se llama una *inferencia inmediata* de α y β, si α es la fórmula $\sim\beta\vee\gamma$(y γ se llama una *inferencia inmediata* de α, si γ es la fórmula $\Pi v\alpha$, donde v designa una variable cualquiera). La clase de las *fórmulas deducibles* se define como la mínima clase de fórmulas que contiene los axiomas y está clausurada respecto a la relación de «inferencia inmediata»[24].

Ahora asignamos unívocamente números naturales a los signos primitivos del sistema P del siguiente modo:

«0» ... 1
«s» ... 3
«$\sim$» ... 5
«$\vee$» ... 7
«Π» ... 9
«(» ... 11
«)» ... 13

A las variables de tipo n asignamos los números de la forma ρ^n (donde ρ es un número primo >13). Mediante esta asignación a cada fila finita de signos primitivos (y en especial a cada fórmula) corresponde biunívocamente una secuencia finita de números naturales. Ahora asignamos (de nuevo biunívocamente) números naturales a las secuencias finitas de números naturales, haciendo corresponder a la secuencia $n_1, n_2, \ldots, n_k$ el número $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots \rho_k^{n_k}$, donde ρ_k denota el k-avo número primo (en orden de magnitud creciente). Así asignamos biunívocamente un número natural no sólo a cada signo primitivo, sino también a cada secuencia finita de signos primitivos. Mediante nu(a) denotamos el número natural asignado al signo primitivo (o a la secuencia de signos primitivos) a. Supongamos que esté dada cierta clase o relación n-aria R entre signos primitivos o secuencias de signos primitivos. Le asignamos la clase o relación n-aria R' entre números naturales, en la que están los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si y sólo si hay signos primitivos o secuencias de signos primitivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tales que $x_i = nu(a_i)$ (para $i=1, 2, \ldots, n$) y $a_1, a_2, \ldots,$

[24] La regla de sustitución resulta aquí superflua, pues en los axiomas mismos ya tenemos realizadas todas las sustituciones posibles (al igual que en J. von Neumann: Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Math. Zeitschrift* 26, 1927).

a_n están en la relación R. Las clases y relaciones de números naturales, que corresponden de este modo a los conceptos metamatemáticos hasta ahora definidos, como por ejemplo «variable», «fórmula», «sentencia», «axioma», «fórmula deducible», etc., serán designadas por las mismas palabras escritas con letras mayúsculas pequeñas. Por ejemplo, el enunciado de que en el sistema P hay problemas indecidibles, se convierte en la siguiente afirmación: Hay SENTENCIAS a, tales que ni a ni la NEGACION de a son FORMULAS DEDUCIBLES.

Ahora vamos a insertar aquí una disgresión que por el momento no tiene nada que ver con el sistema formal P. Empecemos por dar la siguiente definición: Decimos que una función numérica[25] $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está *recursivamente definida a partir* de las funciones numéricas $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ y $q(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, si para cada $x_2, \ldots, x_n, k$[26] vale lo siguiente:

$$(2) \quad \begin{aligned} f(0, x_2, \ldots, x_n) &= h(x_2, \ldots, x_n) \\ f(k+1, x_2, \ldots, x_n) &= q(k, f(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Una función numérica f se llama *recursiva primitiva* si hay una secuencia finita de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, que acaba con f y que tiene la propiedad de que cada función f_k de la secuencia está recursivamente definida a partir de dos de las funciones precedentes o resulta de alguna de las funciones precedentes por sustitución[27], o, finalmente, es una constante o la función del siguiente, $x+1$. La longitud de la mínima secuencia de f_i correspondiente a una función recursiva primitiva f se llama su *grado*. Una relación n-aria R entre números naturales se llama

[25] Es decir, su dominio definicional es la clase de los números naturales (o de los n-tuplos de números naturales) y sus valores son números naturales.

[26] En lo sucesivo las letras latinas minúsculas (a veces con subíndices) son siempre variables para números naturales (a no ser que se indique explícitamente lo contrario).

[27] Más precisamente: por introducción de algunas de las funciones precedentes en los lugares argumentales de una de las funciones precedentes, por ejemplo, $f_k(x_1, x_2) = f_p(f_q(x_1, x_2), f_r(x_2))$, $(p, q, r < k)$. No es necesario que todas las variables del lado izquierdo aparezcan también en el derecho.

recursiva primitiva[28] si hay una función n-aria recursiva primitiva f tal que para cada n números naturales $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$Rx_1, \cdots, x_n \leftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = 0^{29}$$

Los siguientes teoremas valen:

I. *Cada función (o relación) obtenida a partir de funciones (o relaciones) recursivas primitivas por sustitución de las variables por funciones recursivas primitivas es recursiva primitiva; igualmente lo es cada función obtenida a partir de funciones recursivas primitivas por definición recursiva según el esquema* (2).

II. *Si R y S son relaciones recursivas primitivas, también lo son $\neg R$ y $R \vee S$ (por tanto, también $R \wedge S$).*

III. *Si las funciones $f(\mathfrak{x})$, $h(\mathfrak{y})$ son recursivas primitivas, también lo es la relación $f(\mathfrak{x}) = h(\mathfrak{y})$*[30].

IV. *Si la función $f(\mathfrak{x})$ y la relación $Rx, \mathfrak{y}$ son recursivas primitivas, también lo son las relaciones S, T definidas por*

$$S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leftrightarrow \exists x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \wedge Rx, \mathfrak{y})$$

$$T(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leftrightarrow \forall x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \rightarrow Rx, \mathfrak{y})$$

así como la función

$$q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \mu x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \wedge Rx, \mathfrak{y}),$$

donde $\mu x \varphi(x)$ significa el mínimo número x, para el que vale $\varphi(x)$, si hay algún tal, y 0, si no lo hay.

---

[28] Incluimos las clases entre las relaciones (como relaciones monarias). Las relaciones recursivas primitivas tienen desde luego la propiedad de que para cada n-tuplo dado de números naturales $x_1, \cdots, x_n$ *se puede decidir si* $R\ x_1, \cdots, x_n$ o no.

[29] Para todas las consideraciones intuitivas (y especialmente para las metamatemáticas) usamos el simbolismo de Hilbert. Véase Hilbert-Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlín, 1928. ⟦Para el simbolismo usado en esta traducción, véase la introducción.⟧

[30] Usamos las letras alemanas $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ como abreviaturas para cualesquiera n-tuplos de variables, como por ejemplo $x_1 x_2, \cdots, x_n$.

El teorema I se sigue inmediatamente de la definición de «recursivo primitivo». Los teoremas II y III se basan en que las funciones numéricas

$$ne(x),\ di(x, y),\ id(x, y)$$

correspondientes a las nociones lógicas $\neg$, $\vee$, $=$, a saber

$$ne(0) = 1;\ ne(x) = 0 \text{ para } x \neq 0$$
$$di(0, x) = di(x, 0) = 0;\ di(x, y) = 1 \text{ si } x \neq 0,\ y \neq 0$$
$$id(x, y) = 0, \text{ si } x = y;\ id(x, y) = 1, \text{ si } x \neq y$$

son recursivas primitivas, como fácilmente se comprueba. He aquí la prueba resumida del teorema IV: Por hipótesis hay una función recursiva primitiva $r(x, \mathfrak{y})$, tal que

$$R\ x, \mathfrak{y} \leftrightarrow r(x, \mathfrak{y}) = 0$$

Definamos ahora mediante el esquema de recursión (2) una función $j(x, \mathfrak{y})$ del siguiente modo:

$$j(0, \mathfrak{y}) = 0$$
$$j(n+1, \mathfrak{y}) = (n+1) \cdot a + j(n, \mathfrak{y}) \cdot ne(a)^{31}$$

donde $a = ne(ne(r(0, \mathfrak{y}))) \cdot ne(r(n+1 \cdot \mathfrak{y})) \cdot ne(j(n, \mathfrak{y}))$.

Por tanto, $j(n+1, \mathfrak{y})$ es igual a $n+1$ (si $a=1$), o es igual a $j(n, \mathfrak{y})$ (si $a=0$)[32]. Evidentemente, el primer caso ocurre si y sólo si todos los factores de a son 1, es decir, si ocurre que

$$\neg R\ 0, \mathfrak{y} \wedge R\ n+1, \mathfrak{y} \wedge j(n, \mathfrak{y}) = 0$$

De aquí se sigue que la función $j(n, \mathfrak{y})$, considerada como función de n, da siempre 0 hasta (pero no incluyendo) el mínimo

[31] Presuponemos como ya sabido que las funciones $x+y$ (adición) y $x \cdot y$ (multiplicación) son recursivas primitivas.

[32] a no puede tomar otros valores que 0 y 1, como se sigue de la definición de *ne*.

valor de n para el que ocurre que $R\ n, \mathfrak{y}$, y a partir de ahí siempre da ese valor. (Por consiguiente, si ya ocurre que $R\ 0, \mathfrak{y}, j(n, \mathfrak{y})$ es constante e igual a 0). Por tanto, ocurre que

$$q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = j(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{y})$$

$$S\ \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \leftrightarrow R\ q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \mathfrak{y}$$

La relación T puede ser reducida, por negación, a un caso análogo al de S. Con esto queda probado el teorema IV.

Las funciones $x+y$, $x \cdot y$, x^v, así como las relaciones $x<y$ y $x=y$ son recursivas primitivas, como fácilmente se comprueba. Partiendo de estos conceptos, vamos a definir una secuencia de funciones (o relaciones) 1-45, cada una de las cuales se define a partir de las precedentes mediante los procedimientos indicados en los teoremas I a IV. En la mayor parte de estas definiciones condensamos en un solo paso varios de los pasos permitidos por los teoremas I a IV. Por tanto, cada una de las funciones (o relaciones) 1-45, entre las que se encuentran, por ejemplo, los conceptos «FORMULA», «AXIOMA» e «INFERENCIA INMEDIATA», es recursiva primitiva.

1. $x/y \leftrightarrow \exists z(z \leqslant x \wedge x = y \cdot z)$[33]
x es divisible por y[34].

2. $\text{Prim}\ x \leftrightarrow \neg \exists z(z \leqslant x \wedge z \neq 1 \wedge z \neq x \wedge x/z) \wedge x > 1$
x es un número primo.

3. $0\ Pr\ x = 0$
$(n+1)\ Pr\ x = \mu y(y \leqslant x \wedge\ \text{Prim}\ y \wedge x/y \wedge y > n\ Pr\ x)$

[33] Después del definiendum, el signo = se usa en el sentido de «igualdad por definición»; el signo ↔, en el de «equivalencia por definición» (por lo demás, el simbolismo es el de Hilbert). ⟦Para el simbolismo usado en esta traducción, véase la Introducción.⟧

[34] Cada vez que en las definiciones siguientes aparece uno de los signos $\forall x$, $\exists x$, μx, éste está seguido de una acotación de x. Esta acotación sirve meramente para asegurar que la noción definida es recursiva primitiva (véase el teorema IV). La extensión de la noción definida, por el contrario, no cambiaría en la mayor parte de los casos, aunque dejásemos de lado dicha acotación.

$n\ Pr\ x$ es el n-avo número primo (por orden de magnitud creciente) contenido en x[34a].

4. $0! = 1.$
$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

5. $Pr(0) = 0$
$Pr(n+1) = \mu y(y \leqslant (Pr(n))! + 1 \wedge \text{Prim } y \wedge y > Pr\ (n))$
$Pr(n)$ es el n-avo número primo (por orden de magnitud creciente).

6. $n\ Gl\ x = \mu y(y \leqslant x \wedge x/(n\ Pr\ x)^y \wedge \neg x/(n\ Pr\ x)^{y+1})$
$n\ Gl\ x$ es el miembro n-avo de la secuencia numérica correspondiente al número x (para $n > 0$ y n no mayor que la longitud de esa secuencia).

7. $l(x) = \mu y(y \leqslant x \wedge y\ Pr\ x > 0 \wedge (y+1)\ Pr\ x = 0)$
$l(x)$ es la longitud de la secuencia numérica correspondiente a x.

8. $x * y = \mu z(z \leqslant (Pr(l(x) + l(y)))^{x+y} \wedge$
$\wedge\ \forall n(n \leqslant l(x) \rightarrow n\ Gl\ z = n\ Gl\ x) \wedge$
$\wedge\ \forall n(0 < n \leqslant l(y) \rightarrow (n + l(x))\ Gl\ z = n\ Gl\ y))$
$x * y$ corresponde a la operación de concatenación de dos secuencias finitas de números.

9. $R(x) = 2^x$
$R(x)$ corresponde a la secuencia numérica que sólo consta del número x (para $x > 0$).

10. $E(x) = R(11) * x * R(13)$
$E(x)$ corresponde a la operación de poner entre paréntesis (11 y 13 son los números asignados a los signos primitivos «(»y«)»).

11. $n \text{ Var } x \leftrightarrow \exists z(13 < z \leqslant x \wedge \text{Prim}(z) \wedge x = z^n) \wedge n \neq 0$
x es una VARIABLE DE TIPO n.

12. $\text{Var } x \leftrightarrow \exists n(n \leqslant x \wedge n \text{ Var } x)$
x es una VARIABLE.

[34a] Para $0 < n \leqslant z$, donde z es el número de diferentes factores primos de x. Obsérvese que $n\ Pr\ x = 0$ para $n = z + 1$.

13. $\text{Neg}(x) = R(5) * E(x)$
Neg (x) es la NEGACION de x.

14. $x \text{ Dis } y = E(x) * R(7) * E(y)$
x Dis y es la DISYUNCION de x e y.

15. $x \text{ Gen } y = R(9) * R(x) * E(y)$
x Gen y es la GENERALIZACION de y respecto a la variable x (suponiendo que x sea una variable).

16. $0 \; N \; x = x$
$(n+1) \; N \; x = R(3) * n \; N \; x$
$n \; N \; x$ corresponde a la operación de poner n veces el signo s delante de x.

17. $Z(n) = n \; N \; (R(1))$
$Z(n)$ es el NUMERAL que designa el número n.

18. $\text{Typ}'_1 \; x \leftrightarrow \exists m \, n(m, n \leqslant x \wedge (m = 1 \vee 1 \text{ Var } m)$
$\wedge \; x = n \; N \; (R(m)))$[34b]
x es un SIGNO DE TIPO 1.

19. $\text{Typ}_n \; x \leftrightarrow (n = 1 \wedge \text{Typ}'_1 \; (x)) \vee (n > 1 \wedge \exists v \; (v \leqslant x \wedge$
$\wedge \; n \text{ Var } v \wedge x = R(v)))$
x es un SIGNO DE TIPO n.

20. $Elf \; x \leftrightarrow \exists yzn \; (y, z, n \leqslant x \wedge \text{Typ}_n(y) \wedge \text{Typ}_{n+1}(z) \wedge$
$\wedge \; x = x * E(y))$
x es una FORMULA ELEMENTAL.

21. $Op \; x \; y \; z \leftrightarrow x = \text{Neg}(y) \vee x = y \text{ Dis } z \vee \exists v(v \leqslant x \wedge$
$\wedge \text{ Var } v \wedge x = v \text{ Gen } y)$

22. $FR \; x \leftrightarrow \forall n(0 < n \leqslant l(x) \rightarrow Elf(n \; Gl \; x) \vee$
$\vee \; \exists pq \; (0 < p, q < n \wedge Op(n \; Gl \; x, p \; Gl \; x, q \; Gl \; x))) \wedge l(x) > 0$
x es una SECUENCIA DE FORMULAS, cada una de las cuales es o una FORMULA ELEMENTAL o se obtiene de las precedentes

34b $m, n \leqslant x$ es una abreviatura de: $m \leqslant x \wedge n \leqslant x$ (y lo mismo para más de dos variables).

mediante las operaciones de NEGACION, DISYUNCION O GENERALIZACION.

23. Form $x \leftrightarrow \exists n(n \leqslant (Pr(l(x)^2))^{x \cdot (l(x))2} \wedge FR\ n \wedge$
$\wedge\ x = (l(n))\ Gl\ n)$[35]

x es una FORMULA (es decir, el último miembro de una SECUENCIA DE FORMULAS n).

24. v Geb n, $x \leftrightarrow$ Var $v \wedge$ Form $x \wedge \exists a\ b\ c\ (a, b, c \leqslant x \wedge$
$\wedge\ x = a * (v$ Gen $b) * c \wedge$ Form $b \wedge l(a) + 1 \leqslant n \leqslant l(a) + l(v$ Gen $b))$
La VARIABLE v está LIGADA en x en el n-avo lugar.

25. $v\ Fr\ n,\ x \leftrightarrow$ Var $v \wedge$ Form $x \wedge v = n\ Gl\ x \wedge n \leqslant l(x) \wedge$
$\wedge \neg v$ Geb n, x
La VARIABLE v está LIBRE en x en el n-avo lugar.

26. $v\ Fr\ x \leftrightarrow \exists n(n \leqslant l(x) \wedge v\ Fr\ n,\ x)$
v aparece como VARIABLE LIBRE en x.

27. $Su\ x\binom{n}{y} = \mu z(z \leqslant (Pr\ (l(x) + l(y)))^{x+y} \wedge \exists u\ v(u, v \leqslant x \wedge$
$\wedge\ x = u * R(n\ Gl\ x) * v \wedge z = u * y * v \wedge n = l(u) + 1))$
$Su\ x\binom{n}{y}$ se obtiene a partir de x cuando sustituimos el n-avo miembro de x por y (suponiendo que $0 < n \leqslant l(x)$).

28. $0\ St\ v,\ x = \mu n(n \leqslant l(x) \wedge v\ Fr\ n,\ x \wedge$
$\wedge \neg \exists p(n < p \leqslant l(x) \wedge v\ Fr\ p,\ x))$
$(k+1)St\ v,\ x = \mu n(n < k\ St\ v,\ x \wedge v\ Fr\ n,\ x \wedge$
$\wedge \neg \exists p\ (n < p < k\ St\ v,\ x \wedge v\ Fr\ p,\ x))$
$k\ St\ v,\ x$ es el $k+1$-avo lugar de x (contado a partir del extremo derecho de la FORMULA x), en el que v aparece LIBRE en x (y es 0 si no hay tal lugar).

29. $A(v, x) = \mu n(n \leqslant l(x) \wedge n\ St\ v,\ x = 0)$
$A(v, x)$ es el número de lugares en que v aparece LIBRE en x.

---

[35] La acotación $n \leqslant (Pr(l(x)^2))^{x \cdot l(x)^2}$ puede comprobarse así: La longitud de la más corta secuencia de fórmulas correspondientes a x puede ser a lo sumo igual al número de subfórmulas de x. Pero hay a lo sumo $l(x)$ subfórmulas de longitud 1, a lo sumo $l(x)-1$ de longitud 2, etc., por tanto en conjunto a lo sumo $\frac{l(x) \cdot (l(x)+1)}{2} \leqslant (l(x))^2$. Por tanto podemos suponer que todos los factores primos de n son menores que $Pr\ ((l(x))^2)$, que su número es $\leqslant (l(x))^2$ y que sus exponentes (que son subfórmulas de x) son $\leqslant x$.

30. $Sb_0(x_y^v) = x$
$Sb_{k+1}\ (x_y^v) = Su\ (Sb_k\ (x_y^v))\ \binom{k\ st\ v,\ x}{y}$

31. $Sb\ (x_y^v) = Sb_{A(v,x)}\ (x_y^v)$[36]
$Sb\ (x_y^v)$ es la noción anteriormente definida de $\mathrm{Subst}_v^b\ \alpha$[37].

32. x Imp y = (Neg(x)) Dis y
x Con y = Neg ((Neg(x)) Dis (Neg(y)))
x Aeq y=(x Imp y) Con(y Imp x)
v Ex y = Neg (v Gen(Neg(y))).

33. $n\ Th\ x = \mu y(y \leqslant x^{(x^n)} \wedge \forall k(k \leqslant l(x) \rightarrow$
$\rightarrow (k\ Gl\ x \leqslant 13 \wedge k\ Gl\ y = k\ Gl\ x) \vee$
$\vee (k\ Gl\ x > 13 \wedge k\ Gl\ y = k\ Gl\ x \cdot (1\ Pr(k\ Gl\ x))^n)))$
$n\ Th\ x$ es la n-ava ELEVACION DE TIPO de x (suponiendo que x y $n\ Th\ x$ sean fórmulas).

A los axiomas I, 1-3, corresponden tres números determinados, que designamos mediante z_1, z_2 y z_3.

Definimos:

34. $Z\text{-}Ax\ x \leftrightarrow x = z_1 \vee x = z_2 \vee x = z_3$

35. $A_1\text{-}Ax\ x \leftrightarrow \exists y(y \leqslant x \wedge$ Form $y \wedge x = (y$ Dis $y)$ Imp $y)$
x es una FORMULA que se obtiene a partir del esquema axiomático II,1 por sustitución. De modo análogo se definen A_2-Ax, A_3-Ax y A_4-Ax, correspondientes a los axiomas II, 2-4.

36. $A\text{-}Ax\ x \leftrightarrow A_1\text{-}Ax\ x \vee A_2\text{-}Ax\ x \vee A_3\text{-}Ax\ x \vee A_4\text{-}Ax\ x$
x es una FORMULA que se obtiene por sustitución a partir de un esquema axiomático conectivo.

37. $Q\ z,\ y,\ v \leftrightarrow \neg \exists n\ m\ w\ (n \leqslant l(y) \wedge m \leqslant l(z) \wedge w \leqslant z \wedge$
$\wedge\ w = m\ Gl\ z \wedge w$ Geb $n,\ y \wedge v\ Fr\ n,\ y)$
z no contiene VARIABLE alguna que esté LIGADA en y en un lugar, en el cual v esté LIBRE.

---

36 Si v no es una VARIABLE o x no es una FORMULA, entonces $Sb(x_y^v) = x$.

37 En vez de $Sb\ (Sb\ (x_y^v)\ _z^w)$ escribimos $Sb\ x_{y\ z}^{v\ w}$, (y análogamente para más de dos VARIABLES).

38. $L_1\text{-}Ax\ x \leftrightarrow \exists v\ y\ z\ n(v,\ y,\ z,\ n \leqslant x \wedge n$ Var $v \wedge$ Typ$_n$ $z \wedge$
$\wedge$ Form $y \wedge Q\ z,\ y,\ v \wedge x = (v$ Gen $y)$ Imp $(Sb\ (y^v_z)))$

x es una FORMULA que se obtiene por sustitución a partir del esquema axiomático III,1.

39. $L_2\text{-}Ax\ x \leftrightarrow \exists v\ q\ p\ (v,\ q,\ p \leqslant x \wedge$ Var $v \wedge$ Form $p \wedge$
$\wedge \neg\ v\ Fr\ p \wedge$ Form $q \wedge x = (v$ Gen $(p$ Dis $q))$ Imp $(p$ Dis $(v$ Gen $q)))$

x es una FORMULA que se obtiene por sustitución a partir del esquema axiomático III,2.

40. $R\text{-}Ax\ x \leftrightarrow \exists u\ v\ y\ n\ (u,\ v,\ y,\ n \leqslant x \wedge n$ Var $v \wedge$
$\wedge\ (n+1)$ Var $u \wedge \neg\, u\ Fr\ y\ \wedge$ Form $y \wedge$
$\wedge\ x = u$ Ex$(v$ Gen $((R(u) * E(R(v)))$ Aeq $y)))$

x es una FORMULA que se obtiene por sustitución a partir del esquema axiomático IV,1.

Al axioma V,1 corresponde un número determinado z_4. Definimos:

41. $M\text{-}Ax\ x \leftrightarrow \exists n(n \leqslant x \wedge x = n\ Th\ z_4)$

42. $Ax\ x \leftrightarrow Z\text{-}Ax\ x \vee A\text{-}Ax\ x \vee L_1\text{-}Ax\ x \vee L_2\text{-}Ax\ x \vee$
$\vee\ R\text{-}Ax\ x \vee M\text{-}Ax\ x$

x es un AXIOMA.

43. $Fl\ x\ y\ z \leftrightarrow y = z$ Imp $x \vee \exists v\ (v \leqslant x \wedge$ Var $v \wedge$
$\wedge\ x = v$ Gen $y)$

x es una INFERENCIA INMEDIATA de y y z.

44. $Bw\ x \leftrightarrow \forall n\ (0 < n \leqslant l(x) \rightarrow Ax(n\ Gl\ x)$
$\vee\ \exists pq(0 < p,\ q < n \wedge Fl\ (n\ Gl\ x,\ p\ Gl\ x,\ q\ Gl\ x))) \wedge l(x) > 0$

x es una DEDUCCION (una secuencia finita de FORMULAS, cada una de las cuales es o un AXIOMA o una INFERENCIA INMEDIATA de dos de las FORMULAS precedentes).

45. $x\ B\ y \leftrightarrow Bw\ x \wedge (l(x))\ Gl\ x = y$

x es una DEDUCCION DE LA FORMULA y.

46. Bew $x \leftrightarrow \exists y\ yBx$

x es una FORMULA DEDUCIBLE. (Bew x es la única de las nociones 1-46 de la que no podemos afirmar que sea recursiva primitiva).

El hecho que puede ser formulado vagamente diciendo que cada relación recursiva primitiva es definible en el sistema *P* (interpretado en cuanto a su contenido del modo habitual) puede ser expresado con precisión y sin referencia a ninguna interpretación natural de las fórmulas de P, mediante el siguiente teorema:

Teorema V: *Para cada relación recursiva primitiva n-aria R hay un* SIGNO RELACIONAL *r (con las* VARIABLES LIBRES[38] $u_1, u_2, \ldots, u_n$) *tal que para cada n-tuplo de números naturales* $(x_1, \ldots, x_n)$ *vale:*

$$(3) \qquad Rx_1, \ldots, x_n \rightarrow \text{Bew}\left(Sb\left(r\,{}^{u_1, \ldots, u_n}_{Z(x_1), \ldots, Z(x_n)}\right)\right)$$

$$(4) \qquad \neg\, Rx_1, \ldots, x_n \rightarrow \text{Bew}\left(\text{Neg}\; Sb\left(r\,{}^{u_1, \ldots, u_n}_{Z(x_1), \ldots, Z(x_n)}\right)\right)$$

Aquí nos limitaremos a esbozar la prueba de este teorema[39], pues no ofrece ninguna dificultad de principio, pero es bastante larga. Probamos el teorema para todas las relaciones $Rx_1, \ldots, x_n$ de la forma $x_1 = f(x_2, \ldots, x_n)$[40] (donde f es una función recursiva primitiva) por inducción completa sobre el grado de f. Para funciones de grado 1 (es decir, constantes y la función $x+1$) el teorema es trivial. Sea f de grado m. Entonces f se obtiene a partir de funciones $f_1, \ldots, f_k$ de menor grado mediante las operaciones de sustitución o de definición recursiva. Puesto que el teorema ya está probado para $f_1, \ldots, f_k$, por hipótesis inductiva, hay SIGNOS RELACIONALES correspondientes $r_1, \ldots, r_k$, tales que (3) y (4) valen. Los procesos de definición (sustitución y defini-

[38] Las VARIABLES $u_1, \ldots, u_n$ pueden estar elegidas de cualquier manera. Por ejemplo, siempre hay un r con las VARIABLES LIBRES 17, 19, 23, ..., etc., para el cual valen (3) y (4).

[39] Desde luego, el teorema V se basa en el hecho de que, dada una relación recursiva primitiva R, para cada n-tuplo de números naturales podemos decidir en base a los axiomas del sistema P si esos números están en la relación R o no.

[40] De ahí se sigue inmediatamente su validez para toda relación recursiva primitiva, pues cada tal relación es equivalente a $0 = f(x_1, \ldots, n_n)$, donde f es recursiva primitiva.

ción recursiva) mediante los que se obtiene f a partir de $f_1, \ldots, f_k$ pueden ser ambos formalmente reproducidos en el sistema P. Si se hace esto se obtiene a partir de $r_1, \ldots, r_k$ un nuevo SIGNO RELACIONAL r[41] para el cual puede probarse sin dificultad que valen (3) y (4), haciendo uso de la hipótesis inductiva. Un SIGNO RELACIONAL r, que corresponde[42] de este modo a una relación recursiva primitiva, se llama recursivo primitivo.

Ahora llegamos a la meta de nuestras consideraciones. Sea K una clase cualquiera de FORMULAS. Designamos mediante Flg (K) –conjunto de inferencias a partir de K– el mínimo conjunto de FORMULAS que contiene todas las FORMULAS de K y todos los AXIOMAS y está clausurado respecto a la relación de «INFERENCIA INMEDIATA». Decimos que K es ω-consistente si no hay ningún SIGNO DE CLASE a, tal que

$$\forall n \left(Sb \left(a \begin{matrix} v \\ Z(n) \end{matrix}\right) \in \mathrm{Flg}(K) \right) \wedge (\mathrm{Neg}(v \ \mathrm{Gen}\ a)) \in \mathrm{Flg}(K)$$

donde v es la VARIABLE LIBRE del SIGNO DE CLASE a.

Cada sistema ω-consistente es también consistente, desde luego. Pero la inversa no vale, como más adelante veremos.

El resultado general sobre la existencia de sentencias indecidibles dice:

Teorema VI: *Para cada clase recursiva primitiva y ω-consistente K de FORMULAS hay un SIGNO DE CLASE r tal que ni v Gen r ni Neg(v Gen r) pertenecen a Flg (K) –donde v es la VARIABLE LIBRE de r.*

Prueba: Sea K una clase recursiva primitiva y ω-consistente cualquiera de FORMULAS. Definimos:

$$(5) \quad Bw_K\ x \leftrightarrow \forall n\ (n \leqslant l(x) \rightarrow Ax(n\ Gl\ x) \vee (n\ Gl\ x) \in K \vee \vee\ \exists p\ q(0 < p,\ q < n \wedge Fl(n\ Gl\ x,\ p\ Gl\ x,\ q\ Gl\ x))) \wedge l(x) > 0$$

(véase la análoga noción 44).

[41] Desde luego, cuando esta prueba se lleva a cabo con todo detalle, r no se define indirectamente con ayuda de su interpretación intuitiva, sino sólo por su estructura puramente formal.

[42] Que, por tanto, en la interpretación usual expresa que esa relación se da.

(6) $x \; B_K \; y \leftrightarrow Bw_K \; x \wedge (l(x)) \; Gl \; x = y$

(6.1) $\text{Bew}_K \; x \leftrightarrow \exists y \; y B_K x$

(véanse las análogas nociones 45 y 46).

Evidentemente, ocurre que

(7) $\forall x(\text{Bew}_K \; x \leftrightarrow x \in \text{Flg}(K))$

(8) $\forall x(\text{Bew} \; x \rightarrow \text{Bew}_K x)$

Ahora definimos la relación

(8.1) $Q \; x \; y \leftrightarrow \neg \; x \; B_K \left(Sb \left(y {19 \atop Z(y)} \right) \right)$

Puesto que $x B_K y$ –por (6) y (5)– y $Sb \left(y {19 \atop Z(y)} \right)$ –por def. 17,31– son recursivas primitivas, también lo es $Q \; x \; y$. Por el teorema V y (8) hay por tanto un SIGNO RELACIONAL q (con las VARIABLES LIBRES 17,19), tal que

(9) $\neg \; x B_K (Sb \left(y {19 \atop Z(y)} \right)) \rightarrow \text{Bew}_K \; (Sb \left(q {17 \atop Z(x)} {19 \atop Z(y)} \right))$

(10) $x B_K \; (Sb \left(y {19 \atop Z(y)} \right)) \rightarrow \text{Bew}_K \; (\text{Neg} \; Sb \left(q {17 \atop Z(x)} {19 \atop Z(y)} \right))$

Sea

(11) $p = 17 \; \text{Gen} \; q$

(p es un SIGNO DE CLASE con la VARIABLE LIBRE 19) y

(12) $r = Sb \; (q {19 \atop Z(p)})$

(r es un SIGNO DE CLASE recursivo primitivo con la VARIABLE LIBRE 17)[43]. Entonces tenemos

$$(13) \qquad Sb\left(p\,{}^{19}_{Z(p)}\right) = Sb\left((17 \text{ Gen } q)\,{}^{19}_{Z(p)}\right) =$$

$$17 \text{ Gen } Sb\left(q\,{}^{19}_{Z(p)}\right) = 17 \text{ Gen } r$$

(por (11) y (12))[44]; además

$$(14) \qquad Sb\,(q\,{}^{17}_{Z(x)}\,{}^{19}_{Z(p)}) = Sb\,(r\,{}^{17}_{Z(x)})$$

(por (12)). Si ahora sustituimos y por p en (9) y (10), entonces teniendo en cuenta (13) y (14) obtenemos que

$$(15) \qquad \neg\, x\, B_K\, (17 \text{ Gen } r) \rightarrow \text{Bew}_K\, \left(Sb\left(r\,{}^{17}_{Z(x)}\right)\right)$$

$$(16) \qquad x\, B_K(17 \text{ Gen } r) \rightarrow \text{Bew}_K\, \left(\text{Neg } Sb\left(r\,{}^{17}_{Z(x)}\right)\right)$$

De aquí se sigue:

1. 17 Gen r no es K-DEDUCIBLE[45]. Pues si lo fuera, habría (según 6.1) un n tal que $n\ B_K$ (17 Gen r). Pero entonces, por (16) ocurriría que Bew_K (Neg $Sb\left(r\,{}^{17}_{Z(n)}\right)$), mientras que, por otro lado, de la K-DEDUCIBILIDAD de 17 Gen r se sigue también la de $Sb\left(r\,{}^{17}_{Z(n)}\right)$. Por tanto, K sería inconsistente (y en especial ω-inconsistente).

---

[43] Pues r se obtiene a partir del SIGNO RELACIONAL recursivo primitivo q mediante SUSTITUCION de una VARIABLE por el NUMERAL de p.

[44] Las operaciones Gen, Sb son intercambiables, si se refieren a distintas VARIABLES.

[45] Con «x es K-DEDUCIBLE» queremos decir que $x \in \text{Flg}\,(K)$, lo que, por (7), significa lo mismo que $\text{Bew}_K\, x$.

2. Neg (17 Gen r) no es K-DEDUCIBLE. Prueba: Como acabamos de probar, 17 Gen r no es K-DEDUCIBLE, es decir, (por 6.1) ocurre que $\forall n \neg (n\ B_K$ (17 Gen r)). De ahí se sigue por (15) que $\forall n$ Bew_K $\left(Sb\left(r_{Z(n)}^{17}\right)\right)$, lo que junto con Bew_K (Neg (17 Gen r)), es incompatible con la ω-consistencia de K.

Por tanto, 17 Gen r es indecidible en base a K, con lo que el teorema VI queda probado.

Fácilmente se ve que la prueba que acabamos de presentar es constructiva[45a], es decir, hemos probado de un modo intuicionistamente del todo aceptable lo siguiente: Sea dada una clase cualquiera de FORMULAS, definida de un modo recursivo primitivo. Entonces, si se nos presentara una decisión formal (en base a K) de la SENTENCIA 17 Gen r –que puede ser efectivamente escrita– nosotros podríamos ofrecer efectivamente:

1. Una DEDUCCION de Neg (17 Gen r).

2. Para cada n dado, una DEDUCCION de $Sb\left(r_{Z(n)}^{17}\right)$.

Es decir, una decisión formal de 17 Gen r tendría como consecuencia la exhibición efectiva de una ω-inconsistencia.

Diremos que una relación (o clase) entre números naturales $Rx_1, \ldots, x_n$ es *decidible* si existe un SIGNO RELACIONAL n-ario r, tal que (3) y (4) –véase el teorema V– valen para él. En especial, por tanto, del teorema V resulta que cada relación recursiva primitiva es decidible. Análogamente diremos que un SIGNO RELACIONAL es *decidible* si corresponde de este modo a una relación decidible. Ahora bien, para la existencia de sentencias indecidibles basta con que la clase K sea ω-consistente y decidible. Pues la decidibilidad se transmite de K a $xB_K y$ –véase (5) y (6)– y a $Qx\ y$ –véase 8.1–, y esto es todo lo que se utilizó en la prueba antes expuesta. La sentencia indecidible tiene en este caso la forma v Gen r, donde r es un SIGNO DE CLASE decidible.

[45a] Pues todas las afirmaciones existenciales que aparecen en la prueba se basan en el teorema V, que, como fácilmente se ve, es intuicionistamente aceptable.

(Incluso basta con que K sea decidible en el sistema ampliado con K).

Si en vez de suponer que K es ω-consistente nos limitamos a suponer que es consistente, entonces ya no se sigue (por la prueba anterior) que exista una sentencia indecidible, pero sí se sigue que existe una propiedad r, para la que no se puede dar un contraejemplo, y para la que tampoco se puede probar que todos los números la tengan. Pues en la prueba de que 17 Gen r no es K-DEDUCIBLE habíamos utilizado sólo el hecho de que K era consistente (véase pág. 76) y por (15) de $\neg(\text{Bew}_K(17 \text{ Gen } r))$ se sigue que para cada número x: $Sb\left(r\begin{matrix}17\\Z(x)\end{matrix}\right)$ y, por tanto, que Neg $Sb\left(r\begin{matrix}17\\Z(x)\end{matrix}\right)$ no es K-DEDUCIBLE para ningún número.

Si añadimos Neg (17 Gen r) a K, obtenemos una CLASE DE FORMULAS K' que es consistente, pero no ω-consistente. K' es consistente, pues si no, 17 Gen r sería K-DEDUCIBLE. Pero K' no es ω-consistente, pues por $\neg(\text{Bew}_K(17 \text{ Gen } r))$ y (15) ocurre que $\forall x\ \text{Bew}_K\ \text{Sb}\left(r\begin{matrix}17\\Z(x)\end{matrix}\right)$ y a fortiori por tanto, que $\forall x\ \text{Bew}_{K'}\ \text{Sb}\left(r\begin{matrix}17\\Z(x)\end{matrix}\right)$, mientras que por otro lado ocurre, claro está, que $\text{Bew}_{K'}$ (Neg (17 Gen r))[46].

Un caso especial del teorema VI se da cuando la clase K consta de un número finito de FORMULAS (y, si se quiere, de las que se obtiene a partir de ellas por ELEVACION DE TIPO). Naturalmente, cada clase finita K es recursiva primitiva. Sea a el mayor número contenido en K. Entonces ocurre para K que

$$x \in K \leftrightarrow \exists m\ n\ (m \leqslant x \wedge n \leqslant a \wedge n \in K \wedge x = m\ Th\ n)$$

Por tanto, K es recursiva primitiva. Esto nos permite inferir que incluso con ayuda del axioma de elección (para todos los tipos) o de la hipótesis generalizada del continuo no todas las

[46] Desde luego, con esto sólo hemos probado la existencia de clases K, que son consistentes, pero no ω-consistentes, bajo el supuesto de que hay algún K consistente (es decir, de que P es consistente).

sentencias son decidibles, suponiendo que estas hipótesis sean ω-consistentes.

En la prueba del teorema VI no se utilizaron otras propiedades del sistema P que las siguientes:

1. La clase de los axiomas y de las reglas de inferencia (es decir, la relación de «inferencia inmediata») son recursivamente definibles (tan pronto como reemplazamos de algún modo los signos primitivos por números naturales).

2. Cada relación recursiva primitiva es definible (en el sentido del teorema V) en el sistema P.

Por eso en cada sistema formal, que satisface los supuestos 1 y 2 y es ω-consistente, hay sentencias indecidibles de la forma $\forall x\ Fx$, donde F es una propiedad recursiva primitiva de los números naturales, y lo mismo ocurre en cada extensión de un tal sistema resultante de añadir una clase recursivamente definible y ω-consistente de axiomas. Como fácilmente se comprueba, entre los sistemas que satisfacen los supuestos 1 y 2 se cuentan las teorías axiomáticas de conjuntos de Zermelo-Faenkel y de von Neumann[47], así como el sistema axiomático de la teoría de números que consta de los axiomas de Peano, la definición recursiva (según el esquema (2)) y las reglas lógicas[48]. El supuesto 1 es satisfecho en general por cada sistema, cuyas reglas de inferencia son las usuales y cuyos axiomas (análogamente a los de P) se obtienen por sustitución a partir de un número finito de esquemas[48a].

---

[47] La prueba del supuesto 1 resulta aquí incluso más sencilla que en el caso del sistema P, pues sólo hay un tipo de variable (o dos en el sistema de von Neumann).

[48] Véase el problema III en la conferencia de D. Hilbert: Probleme der Grundlegung der Mathematik. *Math. Ann.*, 102.

[48a] Como se mostrará en la segunda parte de este artículo, la verdadera razón de la incompletud inherente a todos los sistemas formales de la matemática es que la formación de tipos cada vez mayores puede continuarse hasta lo transfinito (véase D. Hilbert, Über das Unendliche, *Math. Ann.*, 95, p. 184), mientras que en cada sistema formal a lo sumo disponemos de un número infinito numerable de ellos. En efecto, se puede mostrar que las sentencias indecidibles aquí construidas se vuelven decidibles si añadimos tipos más altos adecuados (por ejemplo, el tipo ω al sistema P). Algo parecido ocurre con la teoría axiomática de conjuntos.

3

Ahora vamos a sacar algunas consecuencias del teorema VI y para ello damos la siguiente definición:

Una relación (o clase) se llama *aritmética* si puede ser definida con la sola ayuda de las nociones + y · (adición y multiplicación de números naturales)[49] y de las constantes lógicas $\vee$, $\neg$, $\forall x$ y $=$, donde $\forall x$ y $=$ sólo pueden referirse a números naturales[50]. De modo análogo se define la noción de «sentencia aritmética». En especial son aritméticas las relaciones «mayor que» y «congruente módulo n», pues ocurre

$$x > y \leftrightarrow \neg \exists z(y = x + z)$$

$$x \equiv y (\text{mod } n) \leftrightarrow \exists z(x = y + z \cdot n \vee y = x + z \cdot n)$$

Ahora tenemos el siguiente

Teorema VII: *Cada relación recursiva primitiva es aritmética.*

Probaremos la siguiente versión de este teorema: Cada relación de la forma $x_0 = f(x_1, \dots, x_n)$, donde f es recursiva primitiva, es aritmética. Procedamos por inducción completa sobre el grado de f. Tenga f el grado s $(s > 1)$. Entonces ocurre que o

1. $f(x_1, \dots, x_n) = h(j_1(x_1, \dots, x_n), j_2(x_1, \dots, x_n), \dots, j_m(x_1, \dots, x_n))$[51]
(donde h y todos los j_i son de grado menor que s) o

2. $f(0, x_2, \dots, x_n) = p(x_2, \dots, x_n)$
$f(k+1, x_2, \dots, x_n) = q(k, f(k, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$
(donde p y q son de grado menor que s)

---

[49] Aquí y en lo sucesivo consideramos siempre que el cero es un número natural.

[50] El definiens de un tal concepto debe constar exclusivamente de los signos indicados, de variables x, y, ..., para números naturales y de las constantes 0 y 1 (no pueden aparecer en él variables para funciones o conjuntos). En los prefijos, desde luego, puede aparecer cualquier otra variable para números en vez de x.

[51] Naturalmente, no es necesario que todos los $x_1, \dots, x_n$ aparezcan de hecho en los j_i (véase el ejemplo de la nota 27).

En el primer caso tenemos

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y_1 \ \dots \ y_m \ (Rx_0 y_1, \dots, y_m \wedge$$
$$\wedge \ S_1 y_1, x_1, \dots, x_n \wedge \dots \wedge S_m y_m, x_1, \dots, x_n)$$

donde R y S_i son las relaciones aritméticas, existentes por hipótesis inductiva, que son equivalentes con $x_0 = h(y_1, \dots, y_m)$ y $y = j_i(x_1, \dots, x_n)$. Por eso en este caso $x_0 = f(x_1, \dots, x_n)$ es aritmética.

En el segundo caso vamos a aplicar el siguiente procedimiento. Podemos expresar la relación $x_0 = f(x_1, \dots, x_n)$ con ayuda del concepto «sucesión de números» (t)[52] del siguiente modo:

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists t \ (t_0 = p(x_2, \dots, x_n) \wedge$$
$$\wedge \ \forall k(k < x_1 \rightarrow t_{k+1} = q(k, t_k, x_2, \dots, x_n)) \wedge x_0 = t_{x1})$$

Si $Sy \ x_2, \dots, x_n$ y $Tz \ x_1, \dots. \ x_{n+1}$ son las relaciones aritméticas, existentes por hipótesis inductiva, que son equivalentes a $y = p(x_2, \dots, x_n)$ y $z = q(x_1, \dots, x_{n+1})$, respectivamente, entonces

$$(17) \qquad x_0 = f(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists t(St_0 \ x_2, \dots, x_n \wedge$$
$$\wedge \ \forall k \ (k < x_1 \ \rightarrow \ T(t_{k+1}, k, t_k, x_2, \dots, x_n) \ \wedge \ x_0 = t_{x1})$$

Ahora sustituimos la noción de «sucesión de números» por la de «par de números», asignando al par de números n, d la secuencia numérica $t^{(n, d)}$ (tal que $t_k^{(n, d)} = [n]_{1+(k+1)d}$, donde $[n]_m$ denota el mínimo resto no-negativo de n módulo m).

Entonces vale el

Lema 1: Si t es una sucesión cualquiera de números naturales y k es un número natural cualquiera, entonces hay un par de números naturales n, d, tales que $t^{(n, d)}$ y t coinciden en los primeros k miembros.

---

52 t es aquí una variable que toma como valores las sucesiones de números naturales. t_k designa el miembro $k+1$-avo de una sucesión t; t_0 designa su primer miembro.

Prueba: Sea l el máximo de los números k, t_0, t_1, ..., t_{k-1}. Determinemos n de tal modo, que

$$n \equiv t_i \ (\mathrm{mod}(1+(i+1)l!)) \qquad \text{para } i=0, 1, ..., k-1$$

lo cual es posible, pues cada dos números $1+(i+1)l!$ ($i=0$, 1, ..., $k-1$) son primos entre sí. En efecto, un número primo contenido en dos de esos números debería estar contenido en la diferencia $(i_1-i_2)l!$, y puesto que $|i_1-i_2|<l$, también debería estar contenido en $l!$, lo que es imposible. Así pues, el par de números n, $l!$ tiene la propiedad deseada.

Puesto que la relación $x=[n]_m$ está definida por

$$x \equiv n \ (\mathrm{mod}\ m) \wedge x<m$$

y por tanto es aritmética, también es aritmética la relación

$Px_0, x_1, ..., x_n$ definida del siguiente modo:

$$Px_0, ..., x_n \leftrightarrow \exists n\ d\ (S[n]_{d+1}, x_2, ..., x_n \wedge$$

$$\wedge\ \forall k(k<x_1 \rightarrow T[n]_{1+d(k+2)}, k, [n]_{1+d(k+1)}, x_2, ..., x_n) \wedge$$

$$\wedge\ x_0=[n]_{1+d(x_1+1)})$$

Pero por (17) y el lema 1 esta relación es equivalente a $x_0=f(x_1, ..., x_n)$ (en la sucesión t, tal como interviene en (17), sólo importan sus primeros x_1+1 miembros).

Con esto queda probado el teorema VII.

Conforme al teorema VII, para cada problema de la forma $\forall x Fx$ (donde F es recursiva primitiva) hay un problema aritmético equivalente, y puesto que toda la prueba del teorema VII (para cada F particular) se puede formalizar en el sistema P, esta equivalencia es deducible en P. Por eso vale el

Teorema VIII: *En cada uno de los sistemas formales*[53] *mencionados en el teorema VI hay sentencias aritméticas indecidibles.*

Lo mismo vale (según la observación de la pág. 79) para la teoría axiomática de conjuntos y sus extensiones mediante clases recursivas primitivas y ω-consistentes de axiomas.

Finalmente derivamos todavía el siguiente resultado:

Teorema IX: *En todos los sistemas formales mencionados en el teorema VI hay problemas indecidibles de la lógica pura de predicados de primer orden*[54] (es decir, fórmulas de la lógica pura de primer orden, respecto a las cuales no podemos probar ni su validez ni la existencia de un contraejemplo)[55].

Esto se basa en el

Teorema X: *Cada problema de la forma* $\forall x F x$ (*con* F *recursiva primitiva*) *es reducible a la cuestión de si una determinada fórmula de la lógica pura de primer orden es satisfacible o no* (es decir, para cada F recursiva primitiva podemos encontrar una fórmula de la lógica pura de primer orden, cuya satisfacibilidad es equivalente a la verdad de $\forall x Fz$).

Consideramos como fórmulas de la lógica pura de primer orden las fórmulas formadas con los signos primitivos: $\neg$, $\vee$, $\forall$x, =; x, y, ... (variables individuales), Hx, Gxy, Lxyz (variables relacionales y de propiedades), donde $\forall$x y = sólo pueden referirse a individuos[56]. A estos signos añadimos todavía una

[53] Se trata de los sistemas formales ω-consistentes que resultan de añadir a P una clase recursivamente definible de axiomas.

[54] Véase Hilbert-Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik.* En el sistema P entendemos por fórmulas de la lógica pura de predicados de primer orden las fórmulas que se obtienen al sustituir las relaciones por clases de tipo superior (del modo indicado en la pág. 60) en las fórmulas del cálculo de predicados de primer orden de *PM*.

[55] En mi trabajo Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math, und Physik*, XXXVII, 2, he mostrado que cada fórmula de la lógica de predicados de primer orden o es válida o posee un contraejemplo; pero por el teorema IX resulta que no siempre es posible probar la existencia de tal contraejemplo (en los sistemas formales considerados).

[56] Hilbert y W. Ackermann, en su recién citado libro, no incluyen el signo = entre los del cálculo lógico de primer orden. Pero para cada fórmula en que aparece el signo = existe otra fórmula en que ese signo no aparece y que es

tercera especie de variables g(x), l(x, y), j(x, y, z), etc., que representan funciones de objetos (es decir, g(x), l(x, y), etc., designan funciones cuyos argumentos y valores son individuos)[57]. Una fórmula que, además de los signos de la lógica pura de primer orden, contenga variables de la tercera especie (g(x), l(x, y), ..., etc.), será llamada una fórmula en sentido amplio[58]. Las nociones de «satisfacible» y «válido» pueden extenderse sin más a las fórmulas en sentido amplio, y tenemos un teorema que dice que para cada fórmula α en sentido amplio podemos encontrar una fórmula β de la lógica pura de primer orden, tal que la satisfacibilidad de α es equivalente a la de β. β se obtiene a partir de α, sustituyendo las variables de la tercera especie g(x), l(x, y), ... que aparecen en α por expresiones de la forma ιzGzx, ιzLzxy, ... eliminando las funciones «descriptivas» por el método usado en *PM* I, * 14, y uniendo conyuntivamente[59] la fórmula así obtenida con una expresión que diga que todos los G, L, ... que hemos puesto en vez de los g, l, ... son unívocos respecto a su primer lugar.

Ahora mostramos que para cada problema de la forma $\forall x F x$ (donde F es recursiva primitiva) hay un problema equivalente referente a la satisfacibilidad de una fórmula en sentido amplio, de donde –según la observación que acabamos de hacer– se sigue el teorema X.

Puesto que F es recursiva primitiva, hay una función recursiva primitiva $f(x)$, tal que $Fx \leftrightarrow f(x)=0$, y para f hay una secuencia de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, tales que $f_n = f$, $f_1(x) = x+1$ y para cada $f_k (1 < k \leqslant n)$ o bien

(18) 1. $\forall x_2 \ldots x_m (f_k(0, x_2, \ldots, x_m) = f_p(x_2, \ldots, x_m)$

$$\forall x, x_2 \ldots x_m (f_k(f_1(x), x_2, \ldots, x_m) =$$
$$= f_q(x, f_k(x_1 x_2, \ldots, x_m), x_2, \ldots, x_m)$$

---

satisfacible si y sólo si la primera fórmula lo es (véase el trabajo citado en la nota 5).

[57] Además, el dominio de definición debe ser siempre el dominio entero de individuos.

[58] Variables de la tercera especie pueden aparecer en todos los lugares ocupados por variables individuales, por ejemplo, y=l(x), Gxl(y), Gl(x, g(y)), x, etc.

[59] Es decir, formando la conyunción.

donde $p, q < k$[59a],

o bien

(19) 2. $\forall x_1 \dots x_m \, (f_k(x_1, \dots, x_m) = f_r(f_{i_1}(\mathfrak{x}_1), \dots, f_{i_s}(\mathfrak{x}_s)))$[60]

donde $r < k$, $i_v < k$ (para cada $v = 1, 2, \dots, s$)

o bien

(20) 3. $\forall x_1 \dots x_m \, (f_k(x_1, \dots, x_m) = f_1(f_1(\dots(f_1(0))\dots)))$

Además formamos las sentencias:

(21) $\forall x \neg f_1(x) = 0 \wedge \forall x \, y \, (f_1(x) = f_1(y) \rightarrow x = y)$

(22) $\forall x \, (f_n(x) = 0)$

En todas las fórmulas (18), (19), (20) (para $k = 2, 3, \dots, n$) y en (21) y (22) sustituimos ahora las funciones f_i por variables funcionales $\mathfrak{g}_i$ y el número 0 por una variable individual x_0 que no haya aparecido hasta ahora, y a continuación formamos la conyunción γ de todas las fórmulas así obtenidas.

La fórmula $\exists \mathrm{x}_0 \, \gamma$ tiene entonces la propiedad requerida, es decir,

1. Si ocurre $\forall x f(x) = 0$, entonces $\exists \mathrm{x}_0 \, \gamma$ es satisfacible, pues si las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ se ponen en vez de las variables $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_n$ en $\exists \mathrm{x}_0 \, \gamma$, evidentemente resulta un enunciado verdadero.

[59a] La última cláusula de la nota 27 no fue tenida en cuenta en las fórmulas (18). Pero una formulación explícita de los casos con menos variables en el lado derecho resulta aquí necesaria para la corrección formal de la prueba, a menos que añadamos la función de identidad, $I(x) = x$, a las funciones iniciales. ⟦Esta nota fue añadida por Gödel en 1963 a la traducción inglesa de su artículo por van Heijenoort. Véase van Heijenoort: *From Frege to Gödel*, pág. 613.⟧

[60] Los $\mathfrak{x}_i$ ($i = 1, \dots, s$) representan cualesquiera secuencias finitas de las variables $x_1, x_2, \dots, x_m$; por ejemplo, x_1, x_3, x_2.

2. Si $\exists x_0\ \gamma$ es satisfacible, ocurre que $\forall x\, f(x)=0$.

Prueba: Sean h_1, h_2, ..., h_n las funciones, existentes por hipótesis, que producen un enunciado verdadero cuando se ponen en vez de $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$. Su dominio de individuos sea D. Puesto que $\exists x_0\ \gamma$ vale para las funciones h_i, hay un individuo a (de D), tal que todas las fórmulas (18) a (22) se transforman en enunciados verdaderos, (18′) a (22′), si reemplazamos las f_i por h_1 y 0 por a. Ahora formamos la mínima subclase de D, que contiene a y está clausurada respecto a la operación $h_1(x)$. Esta subclase D' tiene la propiedad de que cada una de las funciones h_i, aplicada a elementos de D', proporciona de nuevo elementos de D'. Pues para h_1 vale esto por definición de D', y por (18′), (19′) y (20′) esta propiedad se transmite de los h_1 con índice menor a los que lo tienen mayor. Designemos mediante h'_i las funciones que resultan de restringir los h_1 al dominio de individuos D'. También para estas funciones valen todas las fórmulas (18) a (22) (reemplazando 0 por a y f_i por h'_i).

Puesto que (21) vale para h'_i y a, podemos aplicar biunívocamente los individuos de D' a los números naturales, de tal modo que a se convierte en 0 y la función h'_1 en la función f_1 del siguiente. Pero mediante esta aplicación todas las funciones h'_i se convierten en las funciones f_i, y puesto que (22) vale para h'_n y a, ocurre que $\forall x\ f_n(x)=0$ o $\forall x\ f(x)=0$, que es lo que queríamos probar[61].

Puesto que (para cada F especial) la argumentación que conduce al teorema X puede también ser llevada a cabo en el sistema formal P, también la equivalencia entre un enunciado de la forma $\forall xFx$ (donde F es recursivo primitivo) y la satisfacibilidad de la fórmula correspondiente de la lógica de primer orden es demostrable en P, y por tanto de la indecidibilidad de lo uno se sigue la de lo otro, con lo que queda probado el teorema IX[62].

---

[61] Del teorema X se sigue, por ejemplo, que los problemas de Fermat y de Goldbach podrían ser resueltos, si se pudiera resolver el problema de la decisión para la lógica de primer orden.

[62] Naturalmente, el teorema IX también vale para la teoría axiomática de conjuntos, así como para sus extensiones obtenidas mediante el añadido de clases recursivas primitivas y ω-consistentes de axiomas, pues también en esos sistemas hay enunciados indecidibles de la forma $\forall xFx$ (donde F es recursivo primitivo).

4

De los resultados del apartado 2 se sigue una sorprendente consecuencia relativa a la prueba de la consistencia del sistema *P* (y de sus extensiones), que queda expresada en el siguiente teorema:

Teorema XI: *Sea K una clase recursiva primitiva y consistente*[63] *cualquiera de* FORMULAS. *Entonces ocurre que la* SENTENCIA *que dice que K es consistente no es K*-DEDUCIBLE. En especial, la consistencia de *P* no es deducible[64] en *P*, suponiendo que *P* sea consistente (en caso contrario, naturalmente, toda fórmula sería deducible).

La prueba (meramente esbozada) es la siguiente: Sea *K* una clase recursiva primitiva cualquiera (pero elegida de una vez por todas para las siguientes consideraciones) de FORMULAS (en el caso más simple, la clase vacía). Para probar el hecho de que 17 Gen *r*[65] no es *K*-DEDUCIBLE, sólo habíamos utilizado –como se desprende de 1, pág. 76 –la consistencia de *K*, es decir, ocurre que

$$\text{(23)} \qquad \text{Wid } K \rightarrow \neg \text{Bew}_K \text{ (17 Gen } r)$$

es decir, según 6.1:

$$\text{Wid } K \rightarrow \forall x \neg (x \; B_K \text{ (17 Gen } r))$$

Por (13), 17 Gen $r = Sb\left(p \begin{matrix} 19 \\ Z(p) \end{matrix}\right)$, y por tanto

$$\text{Wid } K \rightarrow \forall x \neg \left(x \; B_K \; Sb\left(p \begin{matrix} 19 \\ Z(p) \end{matrix}\right)\right),$$

[63] *K* es consistente (abreviadamente, Wid *K*) se define así: $\text{Wid } K \leftrightarrow \exists x \text{ (Form } x \wedge \neg \text{Bew}_K \; x)$.

[64] Esto se sigue al tomar como *K* la clase vacía de FORMULAS.

[65] Naturalmente, *r* depende (como *p*) de *K*.

es decir, por (8.1)

(24) $$\text{Wid } K \rightarrow \forall x\ Qxp$$

Ahora constatamos que todas las nociones definidas (y todas las afirmaciones probadas) hasta ahora en los apartados 2[66] y 4 son también definibles (o deducibles) en *P*. Pues no hemos utilizado más que los métodos usuales de definición y prueba de la matemática clásica, tal y como están formalizados en *P*. Especialmente ocurre que *K* (como cada clase recursiva primitiva) es definible en *P*. Sea *w* la SENTENCIA mediante la que se expresa en *P* que Wid *K*. La relación *Qxy* se expresa –conforme a (8.1), (9) y (10)– mediante el SIGNO RELACIONAL *q*, por tanto, *Qxp* por *r* (pues por (12) ocurre que $r = Sb\left(q\,{}^{19}_{Z(p)}\right)$), y el enunciado $\forall x\ Qxp$ por 17 Gen *r*.

Por (24), pues, *w* Imp (17 Gen *r*) es deducible[67] en *P* (y, a fortiori, *K*-DEDUCIBLE). Si *w* fuese *K*-DEDUCIBLE, también 17 Gen *r* sería *K*-DEDUCIBLE, y de ahí se seguiría, por (23), que *K* no es consistente.

Nótese que también esta prueba es constructiva, es decir, caso de que nos presenten una DEDUCCION de *w* a partir de *K*, nuestra prueba permite obtener efectivamente una contradicción a partir de *K*. La prueba entera del teorema XI puede trasladarse literalmente a la teoría axiomática de conjuntos *M* y a la matemática clásica axiomática[68] *A* y también aquí obtenemos el mismo resultado: No hay prueba alguna de la consistencia de *M* (o de *A*), que pudiera ser formalizada en *M* (o en *A*), suponiendo que *M* (o *A*) sea consistente. Hagamos notar explícitamente que el teorema XI (y los resultados correspondientes sobre *M* y *A*) no se oponen al punto de vista formalista de Hilbert. En efecto, este punto de vista sólo supone la existencia

---

[66] Desde la definición de «recursivo primitivo» en la pág. 64 hasta la prueba del teorema VI, inclusive.

[67] Que de (23) podamos inferir la verdad de *w* Imp (17 Gen *r*) se debe a que la sentencia indecidible 17 Gen *r* afirma su propia indeducibilidad, como ya observamos al principio.

[68] Véase J. von Neumann: Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Math. Zeitschrift*, 26, 1927.

de una prueba de consistencia llevada a cabo por medios finitarios y sería concebible que hubiera pruebas finitarias que no fuesen representables en *P* (ni en *M* o *A*).

Puesto que para cada clase consistente *K* *w* no es *K*-DEDUCIBLE, ocurre que siempre que Neg(*w*) no es *K*-DEDUCIBLE ya tenemos sentencias (a saber, *w*) no decidibles en base a *K*. Con otras palabras en el teorema VI podemos sustituir la hipótesis de la ω-consistencia por esta otra: la sentencia «*K* es inconsistente» no es *K*-DEDUCIBLE. (Nótese que existen clases consistentes *K* para las que esa sentencia es *K*-DEDUCIBLE.)

En este trabajo nos hemos limitado básicamente al sistema *P* y sólo hemos indicado las aplicaciones a otros sistemas. Los resultados en toda su generalidad serán formulados y probados en una continuación de próxima aparición. En ese trabajo presentaremos también la prueba detallada del teorema XI, que aquí sólo fue esbozada.

Nota suplementaria, añadida en 1963

Como consecuencia de avances posteriores, en particular del hecho de que gracias a la obra de A. M. Turing[69] ahora disponemos de una definición precisa e indudablemente adecuada de la noción general de sistema formal[70], ahora es posible dar una versión completamente general de los teoremas VI y XI. Es decir, se puede probar rigurosamente que en *cada* sistema formal consistente que contenga una cierta porción de teoría finitaria de números hay sentencias aritméticas indecidibles y que, además, la consistencia de cualquiera de esos sistemas no puede ser probada en el sistema mismo.

---

[69] Véase A. M. Turing [1937]: On computable numbers, with an application to the Entscheidungs-problem, pág. 249.

[70] En mi opinión, el término «sistema formal» o «formalismo» no debiera ser nunca usado más que para esta noción. En una conferencia en Princeton ⟦véase pág. 331 de este volumen⟧ sugerí ciertas generalizaciones transfinitas de los formalismos, pero se trataba de algo radicalmente diferente de los sistemas formales en el sentido propio del término, cuya propiedad característica consiste en que en ellos el razonamiento puede ser, en principio, completamente reemplazado por operaciones mecánicas.

Introducción a:
Discusión sobre la fundamentación de la matemática

El 7 de septiembre de 1930 tuvo lugar una discusión sobre los fundamentos de la matemática en la que participaron Hahn, Carnap, von Neumann, Scholz, Heyting, Reidemeister y Gödel. La discusión giraba en torno a las clásicas posiciones del logicismo, el formalismo y el intuicionismo.

El programa formalista de Hilbert, al igual que el intuicionismo, daba la preeminencia a la matemática finitaria, que sería la única plenamente significativa y verdadera. Pero, al contrario que el intuicionismo, consideraba aceptable el gran edificio de la matemática clásica, incluidos sus múltiples aspectos transfinitos, pues éstos podían servir para obtener nuevos resultados finitarios (sobre números naturales). Lo único que exigía era que se probase la consistencia formal de la matemática clásica. Para ello había que ofrecer una prueba metamatemática finitaria de la consistencia del sistema formal de la matemática clásica. En 1931 Gödel mostraría que esta exigencia del programa hilbertiano era imposible de cumplir. Pero ya en esta discusión de 1930 Gödel manifiesta sus dudas filosóficas respecto al sentido último del programa formalista. Incluso si la prueba de consistencia del sistema formal de la matemática clásica fuese posible, ello, por sí solo, no garantizaría la verdad de los teoremas matemáticos finitarios obtenidos con su ayuda.

Con posterioridad a esta discusión apareció el famoso artículo de Gödel «Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines», que tanta repercusión tendría sobre la filosofía de la matemática. Los editores de la revista *Erkenntnis*, que iba a publicar la discusión antes citada, rogaron a Gödel que les comunicara un resumen de sus recientes resultados, para publicarlo en el mismo número de la revista, como suplemento a la discusión, y así lo hizo Gödel. La discusión apareció bajo el título *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik* (Discusión sobre la fundamentación de la matemática) en el número 2 de la revista *Erkenntnis*, correspondiente a 1931-32. La breve intervención de Gödel aparece en las páginas 147-148. El *Nachtrag* (suplemento) ocupa las páginas 149 a 151.

J. M.

Jesús Mosterín

DISCUSION SOBRE LA FUNDAMENTACION DE LA MATEMATICA

Según la concepción formalista a los enunciados significativos de la matemática añadimos (pseudo-)enunciados transfinitos, que en sí mismos no significan nada, sino que sólo sirven para redondear el sistema, del mismo modo que logramos un sistema redondeado de geometría mediante la introducción de puntos infinitamente lejanos. Esta concepción presupone que, si al sistema *S* de los enunciados significativos añadimos el sistema T de los enunciados y axiomas transfinitos y luego, dando un rodeo y usando enunciados de T, probamos un enunciado de S, entonces ese enunciado es también verdadero en cuanto a su contenido, y, por tanto, que ningún enunciado falso en cuanto a su contenido se vuelve deducible por el añadido de los axiomas transfinitos. Esta exigencia suele ser reemplazada por la de la consistencia. Quisiera ahora señalar que estas dos exigencias no pueden en modo alguno ser consideradas como equivalentes. Pues si en un sistema formal consistente *A* (por ejemplo, el de la matemática clásica) una sentencia significativa φ es deducible con la ayuda de los axiomas transfinitos, lo único que se sigue de la consistencia de *A* es que *no*-φ no es deducible *dentro* del sistema formal *A*. Sin embargo, sigue siendo concebible que uno pudiera percatarse de la verdad de *no*-φ mediante ciertas consideraciones (intuicionistas) sobre su contenido, que no

fuesen formalmente representables en A. En este caso, y a pesar de la consistencia de A, sería deducible en A una sentencia, de cuya falsedad podríamos percatarnos mediante consideraciones finitarias. De todos modos, en cuanto entendemos la noción de «sentencia significativa» de un modo suficientemente restringido (por ejemplo, limitada a las ecuaciones numéricas finitas), ya no puede ocurrir tal cosa. Por el contrario, sería perfectamente posible, por ejemplo, que pudiéramos deducir con los medios transfinitos de la matemática clásica una sentencia de la forma $\exists x\ Fx$, donde F es una propiedad finitaria de los números naturales (la negación de la hipótesis de Goldbach, por ejemplo, tiene esa forma), y, por otro lado, que mediante consideraciones sobre su contenido pudiéramos percatarnos de que todos los números naturales tienen la propiedad *no-F*, y yo quisiera señalar que esto seguiría siendo posible aunque hubiéramos probado la consistencia del sistema formal de la matemática clásica. Pues nunca podemos estar seguros de que todas las consideraciones sobre el contenido sean representables en un sistema formal determinado.

Supuesta la consistencia de la matemática clásica, uno puede incluso ofrecer ejemplos de enunciados (del mismo tipo que los de Goldbach o Fermat) que son verdaderos en cuanto a su contenido, pero no son deducibles en el sistema formal de la matemática clásica. Por tanto, si añadimos la negación de un tal enunciado a los axiomas de la matemática clásica, obtenemos un sistema consistente, en el que es deducible un enunciado falso en cuanto a su contenido.

Suplemento

Los editores de *Erkenntnis* me han pedido que resuma los resultados de mi trabajo «Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines», que acaba de aparecer en *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XXXVIII, y que todavía no estaba impreso cuando se celebró la reunión de Könisberg.

Este trabajo trata de problemas de dos tipos, a saber, en primer lugar de la cuestión de la completud (decidibilidad) de los

sistemas formales de la matemática, y en segundo lugar de la cuestión de las pruebas de consistencia para tales sistemas. Un sistema formal se llama completo si cada sentencia expresable con sus signos es formalmente decidible a partir de sus axiomas, es decir, si para cada tal sentencia α existe una secuencia finita de inferencias acordes con las reglas del cálculo lógico que empieza con algunos axiomas y termina con la sentencia α o con la sentencia *no*-α. Un sistema S se llama completo respecto a cierta clase K de sentencias, si al menos cada sentencia de K es decidible a partir de los axiomas. En el trabajo anteriormente citado se muestra que no hay ningún sistema formal con un número finito de axiomas que sea completo ni siquiera respecto de las sentencias aritméticas[1]. Aquí entendemos por «sentencias aritméticas» aquellas en que no aparecen más nociones que + , . , = (adición, multiplicación e identidad, referidas a números naturales), además de los conectores lógicos y los cuantificadores universal y existencial, aplicados sólo a variables de números naturales (por lo cual en las sentencias aritméticas no aparecen más variables que las de números naturales). Incluso para los sistemas formales con un número infinito de axiomas hay sentencias aritméticas indecidibles, con tal de que su esquema axiomático cumpla ciertas condiciones (muy generales). De lo dicho se sigue en especial que hay sentencias aritméticas indecidibles en todos los sistemas formales conocidos de la matemática –por ejemplo, en *Principia Mathematica* (con axioma de reducibilidad, de elección y de infinitud), en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y en la de von Neumann, y en los sistemas formales de la escuela de Hilbert–. Lo primero que hay que hacer notar respecto a los resultados sobre las pruebas de consistencia es que aquí se trata de la consistencia en el sentido formal (o hilbertiano), es decir, la consistencia es considerada como una propiedad puramente combinatoria de ciertos sistemas de signos y de sus «reglas del juego». Ahora bien, los hechos combinatorios pueden ser expresados con los símbolos de los sistemas formales matemáticos (como *Principia Mathema-*

[1] Suponiendo que a partir de los axiomas del sistema formal en cuestión no sean deducibles sentencias aritméticas falsas (es decir, refutables en cuanto a su contenido).

tica). Por eso el enunciado de que un cierto sistema formal *S* es consistente frecuentemente puede ser expresable con los símbolos de ese sistema (en especial vale esto para los sistemas antes mencionados). Lo que puede probarse es lo siguiente: Para todos los sistemas formales, para los que anteriormente se ha afirmado la existencia de sentencias aritméticas indecidibles, el enunciado de la consistencia del sistema en cuestión es una de las sentencias indecidibles en ese sistema. Es decir, una demostración de la consistencia de uno de estos sistemas *S* sólo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no son formalizables en *S*. Por tanto, sería completamente imposible obtener una prueba finitaria de consistencia (como la buscan los formalistas) para un sistema formal en el que estén formalizados todos los modos finitarios (es decir, intuicionistamente aceptables) de prueba. De todos modos, parece dudoso que alguno de los sistemas formales construidos hasta ahora, como el de *Principia Mathematica*, sea tan abarcador, o incluso que exista uno tan abarcador.

Introducción a:
Sobre el cálculo conectivo intuicionista

El conjunto A de las fórmulas conectivas deducibles en un cálculo adecuado de lógica conectiva clásica es el conjunto de las fórmulas clásicamente válidas, es decir, de las fórmulas válidas en el conocido modelo que tiene como ámbito el conjunto $\{0, 1\}$ de los valores veritativos, que tiene como negación la función que al 0 le asigna el 1, y al 1 el 0, etc. El conjunto P de las fórmulas conectivas deducibles en un cálculo adecuado de la lógica conectiva n-valente (para $3 \leqslant n \leqslant \aleph_0$) es el conjunto de las fórmulas válidas en cierto modelo que tiene como ámbito un conjunto (por ejemplo, $\{0,1/3, 2/3, 1\}$ para $n=4$) de n valores veritativos. ¿Sería posible caracterizar el conjunto de las fórmulas deducibles en el cálculo conectivo intuicionista de Heyting mediante un modelo con un ámbito finito, o, equivalentemente, mediante una matriz veritativa con un número finito de valores veritativos? En 1932 Gödel probó que ello no es posible y comunicó su prueba a la Academia de Ciencias de Viena.

La comunicación de Gödel apareció bajo el título *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül* (Sobre el cálculo conectivo intuicionista) en *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse 69 (1932), págs. 65-66. El texto original ha sido reproducido en Berka y Kreiser (1971), pág. 186.

J. M.
Jesús Mosterín

SOBRE EL CALCULO CONECTIVO INTUICIONISTA

Respecto al sistema H de la lógica conectiva intuicionista construido por A. Heyting[1] valen los siguientes teoremas:

I. No hay modelo alguno con un número finito de elementos (valores veritativos) que satisfaga todas y solas las fórmulas deducibles en H (es decir, donde todas y solas estas fórmulas reciban valores señalados en cualquier asignación de valores del modelo a las variables).

II. Entre H y el sistema A de la lógica conectiva usual se encuentran infinitos sistemas, es decir, hay una sucesión monótona decreciente de sistemas, tales que todos ellos incluyen H y están incluidos en A.

La prueba resulta de los siguientes hechos:
Sea φ_n la fórmula:

$$\underset{1 \leqslant i < k \leqslant n}{\underset{\dots}{\nabla}} (a_i \supset\subset a_k)$$

donde $\underset{\dots}{\nabla}$ representa la disyunción ∇ iterada y los a_i son variables

[1] Véase A. Heyting [1930]: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.

sentenciales. φ_n es satisfecha por cada modelo con menos de n elementos que satisface todas las fórmulas deducibles en H. Pues en cada asignación se asigna el mismo elemento e a a_i y a_k en al menos un miembro de la disyunción φ_n, y $(e \supset \subset e) \nabla \beta$ recibe siempre un valor señalado, sea β lo que sea, pues la fórmula $(\psi \supset \subset \psi) \nabla \beta$ es deducible en H. Sea además S_n el siguiente modelo:

Elementos: $\{1, 2, ..., n\}$, elemento señalado: 1;

$$a \nabla b = \text{mín } (a, b); \qquad a \Delta b = \text{máx } (a, b);$$

$$a \supset b = 1, \text{ si } a \geqslant b; \qquad a \supset b = b, \text{ si } a < b$$

$$-a = n, \text{ si } a \neq n, \quad -n = 1$$

Entonces S_n satisface todas las fórmulas de H y la fórmula φ_{n+1}, así como todas las φ_i con mayor índice, pero no satisface φ_n ni ninguna φ_i con índice menor. De aquí se sigue especialmente que ningún φ_n es deducible en H. Por lo demás ocurre que una fórmula de la forma $\alpha \nabla \beta$ sólo puede ser deducible en H, si ya α es deducible o β es deducible en H.

Introducción a:
Un caso especial del problema de la decisión en la lógica teórica

Un conjunto Φ de fórmulas de la lógica pura de primer orden (sin identidad) es decidible respecto a satisfacibilidad si y sólo si existe un procedimiento automático que para cada fórmula $\varphi \in \Phi$ nos permite decidir en un número finito de pasos si φ es satisfacible o no.

En 1936 probó Church que la lógica de primer orden es indecidible. No existe ningún procedimiento que nos permita decidir, para cualquier fórmula φ, si φ es satisfacible o no. Pero aunque el conjunto de todas las fórmulas de primer orden sea indecidible respecto a satisfacibilidad, ciertos subconjuntos suyos son decidibles.

Como es bien sabido, toda fórmula es equivalente a (es decir, es satisfecha por las mismas interpretaciones que) alguna fórmula prenexa. Por ello el problema de la decisión para la lógica de predicados puede ser convenientemente estudiado limitando nuestra atención a las fórmulas prenexas. Toda fórmula prenexa tiene la forma $\pi\alpha$, donde π es un prefijo (serie de cuantificadores y variables) y α una fórmula sin cuantificadores. ¿Qué clases de fórmulas prenexas (definidas por sus prefijos) son decidibles respecto a satisfacibilidad? En 1928 Bernays y Schönfinkel habían probado que las clases de fórmulas prenexas caracterizadas por prefijos de la forma $\exists x_1 \ldots x_n$ o de la forma $\forall x_1 \ldots x_n$ o de

la forma $\exists x_1 \ldots x_n \, \forall y_1 \ldots y_m$ son decidibles. En 1930 Gödel probó que también la clase de fórmulas prenexas caracterizada por prefijos de la forma $\exists x_1 \ldots x_n \, \forall y_1 \, y_2 \, \exists z_1 \ldots z_m$ (es decir, con sólo dos cuantificadores universales, y éstos, seguidos) es decidible respecto a satisfacibilidad. El mismo resultado fue luego probado de otro modo por Kalmar y Schütte (1934).

Este resultado de Gödel fue presentado en 1930 en el coloquio matemático que dirigía Karl Menger en Viena y apareció bajo el título *Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik* (Un caso especial del problema de la decisión en la lógica teórica) en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, ed. por Karl Menger, núm. 2 (1929-30), págs. 27-28.

J. M.

UN CASO ESPECIAL DEL PROBLEMA DE LA DECISION EN LA LOGICA TEORICA

Partiendo del método empleado en la prueba de la suficiencia del cálculo deductivo de primer orden (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, p. 349) se puede desarrollar un procedimiento que para cada fórmula de la forma

$$\exists x_1 \cdots x_n \ \forall y_1 y_2 \ \exists z_1 \cdots z_m \ \alpha(x_i y_i z_i)$$

permite decidir si es satisfacible o no. En primer lugar reducimos del modo conocido[1] el problema al de las fórmulas de la forma

$$(1) \qquad \forall x_1 x_2 \ \exists x_3 \cdots x_n \ \varphi(x_1 \cdots x_n)$$

A continuación suponemos que en φ sólo aparecen variables relacionales binarias, a saber, F_1, F_2, ..., F_s. Sea A el conjunto de las fórmulas $F_i x_1 x_1$ para $i=1, 2, ..., s$; sea B el conjunto de las fórmulas $F_i x_p x_q$ para $i=1, 2, ..., s$; $p=1, 2$; $q=1, 2$. Ocurre que $A \subset B$. Mediante $\mathscr{A}_i$ (para $i=1, 2, ...,$ etc.) designamos una asignación de valores veritativos $+$, $-$ a las fórmulas de A, y

[1] Véase M. Ackermann (1928): *Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke*, p. 647.

mediante $\mathscr{B}_i$ (para $i=1, 2, \ldots$, etc.)[2], una tal asignación a las fórmulas de B. (Sólo hay un número finito de tales $\mathscr{A}_i$ y $\mathscr{B}_i$.) Si está dada una realización de los F_i en un dominio de individuos D, entonces cada elemento $a \in D$ proporciona un $\mathscr{A}_i$ determinado y cada dos elementos a, $b \in D$ proporcionan un $\mathscr{B}_j$ determinado, si identificamos a con x_1 y b con x_2. Estos $\mathscr{A}_i$, $\mathscr{B}_j$ los designamos también como $\mathscr{A}_a$, $\mathscr{B}_{a,b}$. Si un $\mathscr{A}_k$ coincide con un $\mathscr{B}_i$ respecto al conjunto A, escribimos $\mathscr{A}_k \subset \mathscr{B}_i$. Mediante $\mathscr{B}'_i$ designamos el $\mathscr{B}_j$ obtenido a partir de $\mathscr{B}_i$ por intercambio de x_1 y x_2.

Esté dado un sistema de relaciones $R_1 \ldots, R_s$ en un dominio de individuos D que satisfaga la fórmula (1). Construimos el conjunto $\mathscr{P}$ de todos los $\mathscr{A}_i$ obtenidos al dejar que la a de $\mathscr{A}_a$ recorra todos los individuos de D, y el conjunto $\mathscr{Q}$ de todos los $\mathscr{B}_i$ obtenidos al dejar que las a, b de $\mathscr{B}_{a,b}$ recorran todos los individuos de D. Los conjuntos (finitos y no vacíos) $\mathscr{P}$ y $\mathscr{Q}$ cumplen evidentemente las siguientes condiciones:

I. Si $\mathscr{A}_i \in \mathscr{P}$ y $\mathscr{A}_k \in \mathscr{P}$, entonces hay un $\mathscr{B}_j \in \mathscr{Q}$, tal que $\mathscr{A}_i \subset \mathscr{B}_j$ y $\mathscr{A}_k \subset \mathscr{B}'_j$.

II. Si $\mathscr{B}_j \in \mathscr{Q}$, entonces hay un sistema de relaciones S_1, $S_2, \ldots, S_s$ definidas en el ámbito de n individuos $a_1, \ldots, a_n$, tal que

1. $\mathscr{B}_j = \mathscr{B}_{a1\, a2}$.

2. $\varphi(\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_n)$ recibe el valor veritativo $+$, si uno sustituye los F_i por los S_i y los x_i por los a_i.

3. $\mathscr{B}_{a_i a_k} \in \mathscr{Q}$ y $\mathscr{A}_{a_i} \in \mathscr{P}$ para todo i, $k=1, 2, \ldots, n$.

Si para una fórmula dada de la forma (1) hay un par de conjuntos no vacíos $\mathscr{P}$ y $\mathscr{Q}$ que cumplen las condiciones I y II es algo que siempre puede decidirse en un número finito de pasos (pues sólo hay un número finito de $\mathscr{A}_i$ y $\mathscr{B}_k$). Si tal par no existe, la fórmula dada no es satisfacible. Si tal par existe, la fórmula dada es satisfacible. En efecto, lo siguiente ocurre: Si $\mathscr{P}$ y $\mathscr{Q}$ cumplen las condiciones I y II y si para las relaciones $T_1, \ldots, T_s$ definidas en un dominio finito K ocurre que $\mathscr{A}_x \in \mathscr{P}$ y $\mathscr{B}_{xy} \in \mathscr{Q}$ para cualesquiera x, $y \in K$, entonces para cada dos individuos

[2] Es decir, numeramos tales asignaciones de cualquier manera y designamos la i-ava como $\mathscr{A}_i$ (respectivamente, $\mathscr{B}_i$).

dados a, $b \in K$ se pueden extender las relaciones T_i a un dominio $K \cup K'$ ampliado por un conjunto K' de $n-2$ individuos $\{r'_1, \ldots, r'_{n-2}\}$, de tal modo que $\varphi(a, b, r'_1, \ldots, r'_{n-2})$ es verdad y también para el dominio ampliado ocurre siempre que $\mathscr{A}_x \in \mathscr{P}$ y $\mathscr{B}_{xy} \in \mathscr{Q}$.

En efecto, por II podemos definir los T_i para los pares de elementos del conjunto $\{a, b\} \cup K'$ y luego por I para los pares $<x, y>$ con $x \in K - \{a, b\}$, $y \in K'$, de tal modo que las condiciones requeridas se cumplan.

Si en φ aparecen variables relacionales n-arias con $n > 2$, entonces hemos de entender por B (respectivamente, por A) el conjunto de las fórmulas que se obtienen colocando las variables x_1, x_2 (respectivamente, x_1) de todas las maneras posibles en los lugares correspondientes detrás de los F_i, con lo que la prueba puede proceder como antes.

Introducción a:
Sobre completud y consistencia

En la sesión del 22 de enero de 1931 del coloquio matemático dirigido por Karl Menger en Viena Gödel presentó una comunicación sobre completud y consistencia, en la que dio a conocer sus famosos resultados sobre la incompletud y la imposibilidad de autoprueba de consistencia de los sistemas formales que incluyan cierta porción de aritmética. La comunicación termina con la indicación de la posibilidad de ampliar el sistema formal dado mediante la introducción de variables de tipo superior y de los correspondientes axiomas de comprensión (o de axiomas de cardinalidad más fuertes, en el caso de la teoría axiomática de conjuntos), con lo que resulta que las sentencias indecidibles construidas para probar la incompletud del sistema formal primitivo se vuelven decidibles en el sistema formal ampliado (aunque se pueden construir otras nuevas para éste) y que la consistencia del sistema primitivo es también demostrable en el ampliado (aunque no la suya). Este proceso puede iterarse indefinidamente.

La comunicación apareció bajo el título *Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit* (Sobre completud y consistencia) en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, núm. 3 (1932), págs. 12-13. J. van Heijenoort tradujo la comunicación al inglés (en van Heijenoort [1967]) y Gödel aprovechó la ocasión para añadir (el 18 de mayo de 1966) algunas precisiones en una nota a pie de página, que hemos incorporado a nuestra traducción.

J. M.
Jesús Mosterín

SOBRE COMPLETUD Y CONSISTENCIA

Sea Z el sistema formal que se obtiene al añadir a los axiomas de Peano el esquema de definición recursiva (sobre una variable) y las reglas del cálculo lógico de primer orden. Por tanto, Z no debe contener más variables que las variables de individuos (es decir, de números naturales) y el principio de inducción completa debe formularse por ello como regla de inferencia. Entonces ocurre:

1. Cada sistema formal S que abarque[1] Z y que tenga un número finito de axiomas y las reglas de sustitución e implica-

[1] Que un sistema formal S abarca a otro T significa que cada sentencia expresable (deducible) en T es también expresable (deducible) en S.

[[Añadido por Gödel en mayo de 1966]]:

Esta *definición no es precisa, y si se precisara de un modo directo, no* proporcionaría una condición suficiente para la no demostrabilidad en S de la consistencia de S. Obtenemos una condición suficiente si usamos la siguiente definición: «S contiene T si y sólo si cada fórmula (o axioma o regla de inferencia o de definición o de construcción de axiomas) de T es una fórmula (o axioma, etc.) de S, es decir, si S es una extensión de T.»

Bajo la hipótesis más débil de que Z es recursivamente traducible de un modo biunívoco en S y que la deducibilidad se preserva en esa dirección, *podría ser que la consistencia de S (incluso de sistemas muy fuertes S) fuera demostrable en S* e incluso en la teoría de números recursiva primitiva. Sin embargo, lo que puede mostrarse que es indemostrable en S es el hecho de que las reglas del

ción como únicos principios de inferencia es incompleto, es decir, en él hay sentencias (que son también sentencias de Z) indecidibles a partir de los axiomas de S, suponiendo que S sea ω-consistente. Aquí llamamos ω-consistente a un sistema formal, si no hay ninguna propiedad F de números naturales, tal que tanto $\exists x \neg Fx$ como todas las fórmulas Fi (para $i=1, 2, ...,$ etc.) son deducibles en él.

2. En cada tal sistema S es indeducible el enunciado de que S es consistente (más exactamente, la sentencia aritmética equivalente que se obtiene al asignar biunívocamente números naturales a las fórmulas).

Los teoremas 1 y 2 valen también para sistemas formales con un número infinito de axiomas y con otros principios de inferencia distintos de los indicados, suponiendo que cuando enumeramos las fórmulas (en orden de longitud creciente y, en caso de igual longitud, lexicográficamente), la clase de los números asignados a los axiomas sea definible y decidible en el sistema Z, así como también la relación n-aria R que se da entre números naturales $x_1 x_2, ..., x_n$ cuando «la fórmula con el número x_1 es inferible de las fórmulas con los números $x_2, ..., x_n$ aplicando una sola vez una de las reglas de inferencia». Aquí decimos que una relación (clase) n-aria R es decidible en Z si para cada n-tuplo de números naturales $k_1 ... k_n$ o bien $Rk_1 ... k_n$ es deducible en Z o bien $\neg Rk_1 ... k_n$ es deducible en Z (hasta

cálculo ecuacional, aplicadas a ecuaciones deducibles en S entre términos recursivos primitivos, proporcionan sólo ecuaciones numéricas correctas (suponiendo que S posea la propiedad cuya indemostrabilidad afirmamos). Nótese que es necesario demostrar esta consistencia «externa» de S (que para los sistemas usuales es trivialmente equivalente con la consistencia) para «justificar» –en el sentido del programa de Hilbert– los axiomas transfinitos de un sistema S. (Por «reglas del cálculo ecuacional» entendemos aquí las dos reglas de sustitución de variables por términos recursivos primitivos y de sustitución de un tal término por otro, cuya igualdad con él ha sido previamente probada.)

El teorema mencionado en último lugar y el teorema 1 del artículo siguen siendo válidos para sistemas formales mucho más débiles que Z, en particular para la *teoría recursiva primitiva de números*, es decir, para lo que queda de Z si omitimos los cuantificadores. Si realizamos ciertos cambios insignificantes en la formulación de las conclusiones de los dos teoremas, éstos valen incluso para cualquier traducción recursiva en S de las ecuaciones entre términos recursivos primitivos, bajo la sola hipótesis de la ω-consistencia (o consistencia externa) de S en esa traducción.

ahora no se conoce ninguna relación numérica decidible que no sea definible y decidible en Z).

Si nos imaginamos que el sistema Z es sucesivamente ampliado por la introducción de variables para clases de números, para clases de clases de números, etc., así como de los correspondientes axiomas de comprensión, entonces obtenemos una sucesión (continuable en lo transfinito) de sistemas formales que cumplen los supuestos antes señalados, y resulta que la consistencia (ω-consistencia) de cada uno de estos sistemas formales es demostrable en todos los siguientes. También las sentencias indecidibles construidas para probar el teorema 1 se vuelven decidibles al añadir tipos superiores y los correspondientes axiomas; pero en los sistemas superiores podemos construir otras sentencias indecidibles por el mismo procedimiento, etc. Todas las sentencias así construidas son expresables en Z (y por tanto son sentencias numéricas), pero no son decidibles en Z, sino sólo en sistemas superiores, como el del análisis. Si construimos la matemática sin tipos, como ocurre en la teoría axiomática de conjuntos, el lugar de las extensiones de tipo es ocupado por los axiomas de cardinalidad (es decir, axiomas que requieren la existencia de conjuntos de cardinalidad cada vez mayor), y de aquí se sigue que ciertas sentencias aritméticas indecidibles en Z se vuelven decidibles mediante la introducción de axiomas de cardinalidad, por ejemplo, del axioma de que hay conjuntos cuya cardinalidad es mayor que cada α_n, donde $\alpha_0 = \aleph_0$ y $\alpha_{n+1} = 2^{\alpha_n}$.

Introducción a:
Una propiedad de los modelos del cálculo conectivo

En respuesta a una pregunta de Karl Menger, Gödel presentó una corta ponencia al coloquio matemático de Viena en la que probó el siguiente teorema:

Para cada sistema $< S, T, \neg, \rightarrow >$ con (1) $T \subset S$, (2) $\neg : S \rightarrowtail S$ y (3) $\rightarrow : S \times S \rightarrowtail S$, que cumpla los requisitos expuestos en I y II (que corresponden a los axiomas y regla del *modus ponens* del cálculo conectivo), pueden encontrarse dos clases W, F tales que

(4) $$W \cup F = S,$$

(5) $$W \cap F = \emptyset,$$

(6) $$T \subset W,$$

(7) para cada $a \in S$: ($a \in W$ y $\neg a \in F$) o ($a \in F$ y $\neg a \in W$),

y (8) para cada a, $b \in S$: $a \rightarrow b \in F$ si y sólo si ($a \in W$ y $b \in F$).

La prueba se lleva a cabo construyendo W por inducción sobre los ordinales y definiendo F como $S - W$. Evidentemente, si S es un conjunto de sentencias y $\neg$, $\rightarrow$ son la negación y el

condicional, entonces W y F son los conjuntos de las sentencias verdaderas y falsas de S, respectivamente. Pero para cualquier sistema (aunque no tenga nada que ver con sentencias) que cumpla (1) a (3) existen (y se pueden encontrar) dos subconjuntos W y F de su ámbito S que cumplen (4) a (8).

La ponencia fue publicada bajo el título *Eine Eigenschaft der Realisierungen des Aussagenkalküls* (Una propiedad de los modelos del cálculo conectivo) en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* (ed. por Karl Menger), núm. 2 (1930-31), págs. 20-21.

J. M.

Jesús Mosterín

UNA PROPIEDAD DE LOS MODELOS DEL CALCULO CONECTIVO

Como respuesta a una pregunta que Menger me planteó por carta se puede probar el siguiente teorema:

Esté dado un conjunto cualquiera S de cosas p, q, r, ..., en el que estén definidas una operación monaria $\neg$ y una operación binaria $\rightarrow$. Sea además T un subconjunto propio de S, que cumpla las siguientes condiciones:

I. Si p, q, r son cosas cualesquiera de S, siempre pertenecen a T las siguientes tres cosas:

a) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$
b) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
c) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$.

II. Si tanto p como $p \rightarrow q$ pertenecen a T, entonces también pertenece q a T.

Bajo estas condiciones siempre hay *una partición de S en dos clases disjuntas:* $S = W \cup F$, *donde* $T \subset W$, *tales que*

a) *de las dos cosas* p *y* $\neg p$ *siempre pertenece exactamente una a* W *y otra a* F,

b) *la cosa $p \rightarrow q$ pertenece a F si y sólo si p pertenece a W y q a F.*

Es decir, si está dado un modelo cualquiera de los axiomas del cálculo conectivo, entonces podemos partir el conjunto de los elementos («sentencias») en dos clases disjuntas, que se comportan de exactamente el mismo modo como las clases de las sentencias verdaderas y falsas del cálculo conectivo normal.

Esbozo de prueba: Imaginemos que S está bien ordenado. Asignemos entonces a cada número ordinal α una subclase T_α de S mediante las estipulaciones:

1. $T_0 = T$.

2. Si α es un número límite, $T_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} T_\gamma$.

3. Si a es el primer elemento de S tal que ni a ni $\neg a$ pertenecen a T_α, entonces $T_{\alpha+1} = \{x \in S / (a \rightarrow x) \in T_\alpha\}$. Si no existe un tal a, entonces $T_{\alpha+1} = T_\alpha$.

Por inducción trasfinita se muestra:

A. Cada T_α cumple los dos requisitos I y II que antes establecimos para T.

B. $T_\alpha \subset T_\beta$ para $\alpha \leqslant \beta$.

C. x y $\neg$ x no pertenecen nunca ambos a T_α.

Si ν es el mínimo número ordinal, tal que $T_\nu = T_{\nu+1}$, entonces $W = T_\nu$ y $F = S - T_\nu$ poseen las propiedades requeridas.

Por ejemplo, B se muestra del siguiente modo: Puesto que por hipótesis inductiva A se cumple para T_α, para cualquier $x \in S$ vale $x \rightarrow (a \rightarrow x) \in T_\alpha$ y por tanto de $x \in T_\alpha$ se sigue $a \rightarrow x \in T_\alpha$, es decir, $x \in T_{\alpha+1}$, y por tanto $T_\alpha \subset T_{\alpha+1}$. Que la condición (b) se cumple para $W = T_\nu$ se sigue de que, por A, vale: $x \rightarrow (y \rightarrow x) \in T_\nu$, $\neg y \rightarrow (y \rightarrow x) \in T_\nu$, $\neg x \rightarrow (y \rightarrow \neg (y \rightarrow x)) \in T_\nu$ para cualesquiera x, $y \in S$.

Introducción a: *Sobre los axiomas de Parry*

En la 33.ª sesión del coloquio matemático de Menger, celebrada el 7 de noviembre de 1931, el americano William T. Parry presentó un cálculo proposicional o conectivo no estándar del tipo ahora llamado de lógica relevante y que él llamaba de «implicación analítica». La diferencia esencial con la lógica clásica consiste en que se eliminan los condicionales en que el consiguiente contiene letras proposicionales no presentes en el antecedente. Gödel sugiere que se busque una prueba de suficiencia o completud para tal cálculo.

En la discusión se planteó la pregunta de cuántos valores de verdad hacen falta para dar una interpretación veritativo-funcional del cálculo proposicional intuicionista de Heyting. En ese momento Gödel no sabía si haría falta un número finito o infinito de valores veritativos. Unos meses más tarde descubrió que ningún número finito basta para obtener tal interpretación y lo expuso en Gödel [1932].

Este breve comentario de Gödel apareció sin título en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, núm. 4 (1931-1932), pág. 6, publicado en 1933.

J. M.

SOBRE LOS AXIOMAS DE PARRY

Quizás se puede interpretar «p implica q analíticamente» del siguiente modo: «q es deducible a partir de p y de los axiomas lógicos, y q no contiene otros conceptos que no estén en p». Después de precisar más esta definición, habría que tratar de obtener una prueba de que los axiomas de Parry son suficientes en el sentido de que son deducibles de ellos todas las sentencias válidas bajo la interpretación de $\rightarrow$ antes indicada.

Durante la discusión se planteó la pregunta de cuántos valores veritativos distintos hay en el cálculo conectivo de Heyting, es decir, cuántas funciones no equivalentes de una variable. (Por ejemplo, $P \vee -p$ no es equivalente a p, ni a $-p$, ni a $- -p$). Hasta ahora ni siquiera se sabe si hay un número finito o infinito.

Introducción a:
Sobre pruebas de independencia en el cálculo conectivo

Desde Peirce se habían usado las matrices o tablas de verdad como procedimiento de decisión para la lógica conectiva clásica. En 1920 Lukasiewicz había usado las matrices veritativas para introducir la lógica trivalente. Por el mismo procedimiento introdujo en 1922 las lógicas n-valentes (para cualquier $n \in \mathbb{N}$) y $\aleph_0$-valentes. En 1926 Bernays utilizó las matrices trivalentes para probar la independencia mutua de los axiomas conectivos de *Principia Mathematica* (excepto uno), así como la de otros sistemas de axiomas conectivos por él construidos. En 1930 Lukasiewicz y Tarski publicaron un artículo en el que se presentaba y estudiaba el método de las matrices para lógicas conectivas de un modo general. En cada matriz distinguían el conjunto de todos los valores veritativos y un subconjunto suyo, el de los valores señalados –en la lógica usual el primer conjunto es $\{0, 1\}$, el segundo es $\{1\}$–. El método de probar la independencia de fórmulas conectivas mediante matrices consiste precisamente en encontrar una matriz y una asignación de valores veritativos a las variables que concedan un (o el) valor señalado a unas fórmulas y un (o el) valor no señalado a otra, con lo que queda probada la independencia de la última respecto a las primeras.

En el coloquio matemático de Viena H. Hahn había planteado la pregunta de si era posible llevar a cabo cada prueba de independencia de fórmulas conectivas con ayuda de matrices finitas (es decir, de matrices con un número finito de valores veritativos). El 2 de diciembre de 1931 Gödel dio respuesta a esa pregunta, probando que ello no es posible y ofreciendo un contraejemplo. La independencia de la fórmula $p \to \neg\neg p$ respecto a otras tres fórmulas indicadas por Gödel puede ser probada mediante una matriz con infinitos valores veritativos, pero no mediante una matriz con un número finito de valores veritativos. Obsérvese que mediante «$\neg^n p$» Gödel designa la fórmula $\neg\neg\neg\neg\ldots$ (n veces) $\ldots$ $\neg\neg p$.

La ponencia apareció bajo el título *Über unabhängigkeitsbeweise im Aussagenkalkül* (Sobre pruebas de independencia en el cálculo conectivo) en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, ed. por K. Menger, núm. 4 (1931-32), págs. 9-10.

J. M.

Jesús Mosterín

SOBRE PRUEBAS DE INDEPENDENCIA EN EL CALCULO CONECTIVO

¿Es posible realizar cada prueba de independencia en el cálculo conectivo con ayuda de modelos (matrices[1]) finitos? Esta cuestión, planteada por Hahn, debe ser negada. Por ejemplo, la sentencia $p \to \neg\neg p$ es independiente de los siguientes axiomas:

1) $p \to p$

2) $(p \to \neg\neg q) \to (p \to q)$

3) $(\neg\neg p \to \neg\neg q) \to (p \to q)$

con las reglas de sustitución y *modus ponens* como reglas de inferencia.

Esto se muestra mediante la siguiente matriz infinita: los elementos sean los números naturales; elemento señalado sea el 0; $\neg p = p + 1$; $p \to q = 0$ para $p \geqslant q$; $p \to q = 1$ para $p < q$.

Por otro lado vale: cada matriz normal finita que satisface 1), 2), 3) satisface también $p \to \neg\neg p$. Prueba:

Sea A el conjunto finito de los elementos (y sea $A^* \subset A$ el conjunto de los elementos señalados) de una matriz normal que

[1] Sobre la noción de matriz lógica, véase Lukasiewicz y Tarski [1930]: Untersuchungen über den Aussagenkalkül.

satisfaga 1), 2), 3), es decir, estén definidas $\neg$ y $\rightarrow$ como operaciones en A de acuerdo con las siguientes condiciones:

a) Para cualquiera p, $q \in A$ los axiomas 1), 2), 3) generan siempre elementos de A^*.

b) De $a \in A^*$ y $a \rightarrow b \in A^*$ siempre se sigue que $b \in A^*$.

Hay que mostrar que entonces también $p \rightarrow \neg\neg p \in A^*$ para cada $p \in A$. Puesto que A sólo contiene un número finito de elementos, tiene que haber dos números k, n, tales que $\neg^{2^k} p = \neg^{2^n} p$ y $k < n$. Por 1) ocurre entonces

$$\neg^{2^k} p \rightarrow \neg^{2^n} p \in A^*$$

Por 3) vale

$$((\neg^{2^k} p \rightarrow \neg^{2^n} p) \rightarrow (\neg^{2^k - 2} p \rightarrow \neg^{2^n - 2} p)) \in A^*$$

y por tanto, $\neg^{2^k - 2} p \rightarrow \neg^{2^n - 2} p \in A^*$. Por aplicación repetida de esta inferencia resulta finalmente $p \rightarrow \neg^{2^{(n-k)}} p \in A^*$. Si a esto aplicamos ($n$-$k$-1) veces 2), se sigue $p \rightarrow \neg\neg p \in A^*$, que es lo que queríamos probar. En los anteriores axiomas podíamos haber escrito $\neg$ en vez de $\neg\neg$ en todas partes. Pero el sistema lógico definido por los axiomas 1), 2), 3) ya no sería un subsistema de la lógica usual (sin embargo sería consistente en el sentido de que no habría ninguna fórmula φ, tal que tanto φ como $\neg\varphi$ pudieran ser deducibles en él.)

Para cada conjunto M de fórmulas conectivas clausurado respecto a la regla de sustitución hay un mínimo número cardinal m ($\leqslant \aleph_0$), tal que hay modelos con m elementos, pero no con menos de m. Por modelo entendemos aquí una matriz que satisface todas y solas las fórmulas de M. Para el conjunto de las fórmulas deducibles de los axiomas antes indicados ese número es $\aleph_0$; y lo mismo vale para el cálculo conectivo de Heyting, por ejemplo[2]. Los conjuntos de fórmulas para los que $m=2$ son isomorfos con los subsistemas del cálculo conectivo usual que contienen todas y solas las tautologías que son expresables empleando únicamente ciertas nociones (por ejemplo, sólo $\rightarrow$).

[2] Véase Gödel [1932b]: Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls [[traducido en pág. 113 del presente libro]].

Introducción a: *Sobre la inmersibilidad isométrica de cuádruplos de puntos de $\mathbb{R}^3$ en la superficie de una esfera*

El matemático Karl Menger estaba embarcado en un programa de reforma de la geometría diferencial y proyectiva, liberándola de la complicada maquinaria conceptual de las coordenadas, las parametrizaciones y las condiciones de diferenciabilidad. Gödel había sido alumno suyo y tomaba parte activa en el coloquio matemático que Menger dirigía en Viena, y en el que las cuestiones geométricas despertaban gran interés. Menger pensaba que la simplificación de la geometría diferencial pasaba por el estudio de los n-tuplos de puntos en espacios métricos compactos y convexos y por la definición de las correspondientes nociones de curvatura. Cada triplo de puntos de tales espacios es isométrico a un triplo de puntos en el plano euklídeo, y su curvatura puede ser definida como el recíproco del radio del círculo circunscrito a estos últimos. Para cuádruplos de puntos el asunto es más complicado, pues no siempre existen cuádruplos isométricos a ellos en el espacio euklídeo, e incluso cuando existen el recíproco del radio de la correspondiente esfera inscrita es irrelevante para definir la curvatura.

Durante el 37 coloquio (del 2 de diciembre de 1931) Laura Klanfer había planteado una pregunta al respecto, a la que Gödel dio respuesta en el 42 coloquio (celebrado el 18 de febrero de 1932). Gödel usó el recíproco del radio de la esfera inscrita para

probar que, si existen cuatro puntos no-coplanarios del espacio euklídeo tridimensional isométricos a un cuádruplo métrico dado, entonces ese cuádruplo métrico es isométrico (bajo la métrica geodésica) a cuatro puntos de la superficie de una esfera.

La comunicación apareció bajo el título *Über die metrische Einbettbarkeit der Quadrupel des* $\mathbb{R}^3$ *in Kugelflächen* (Sobre la inmersibilidad isométrica de cuádruplos de puntos de $\mathbb{R}^3$ en la superficie de una esfera), en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, núm. 4 (1931-1932), págs. 16-17, publicado en 1933.

J. M.

Jesús Mosterín

SOBRE LA INMERSIBILIDAD ISOMETRICA DE CUADRUPLOS DE PUNTOS DE $\mathbb{R}^3$ EN LA SUPERFICIE DE UNA ESFERA

En respuesta a una pregunta planteada en el 37 coloquio, lo siguiente vale: *Un cuádruplo de puntos de un espacio métrico que sea congruente con cuatro puntos de $\mathbb{R}^3$, si no es congruente con cuatro puntos del plano, es congruente con cuatro puntos de la superficie de una esfera, en la cual la distancia entre dos puntos cualesquiera se define como la longitud del arco más corto que los une.* Para probarlo, sea T un teatraedro (del que suponemos que no está en el plano) en $\mathbb{R}^3$, cuyas seis aristas tienen longitudes $a_1, a_2, ..., a_6$, que son iguales a las distancias entre los cuatro puntos dados. Sea R el radio de la esfera circunscrita a T. Establecemos

$$a_{i,x} = \frac{2}{x} \sin \frac{a_i x}{2};$$

por consiguiente, $a_{i,x}$ es la longitud de la cuerda de un arco circular de longitud a_i sobre un círculo de radio $\frac{1}{x}$; para $x = 0$ el límite de $a_{i,x}$ es a_i. Denotemos con $T(x)$ un (posiblemente plano) tetraedro en $\mathbb{R}^3$, cuyas seis aristas son de longitud $a_{i,x}$, en caso de que exista. Sea $T(0) = T$. Al recíproco del radio de la esfera

circunscrita a $T(x)$ lo llamamos $f(x)$; por tanto, $f(0)=\frac{1}{R}$ y, si $T(x)$ está en un plano, entonces $f(x)=0$. Afirmación intermedia: Si a es el mayor de los seis números a_i, entonces en el intervalo abierto $\left(0, \frac{\pi}{a}\right)$ existe un número x, tal que $f(x)=x$. Esbozo de prueba: Sea $\bar{x}$ el máximo número positivo $\leqslant \frac{\pi}{a}$, tal que para cada x del intervalo cerrado $[0, \bar{x}]$ el tetraedro $T(x)$ existe. (La existencia de tal $\bar{x}$ se sigue por la continuidad). $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[0, \bar{x}]$. Si, en primer lugar, $\bar{x}=\frac{\pi}{a}$, entonces $T\left(\frac{\pi}{a}\right)$ existe y la mayor arista de este teatraedro tiene la longitud $\frac{2a}{\pi}$, de modo que el radio de la esfera circunscrita es $>\frac{a}{\pi}$, y $f\left(\frac{\pi}{a}\right)<\frac{\pi}{a}$. Puesto que, por el otro lado, $f(0)=\frac{1}{R}>0$, para algún valor intermedio tiene que valer $f(x)=x$. Si, en segundo lugar, $\bar{x}<\frac{\pi}{a}$, entonces $T(\bar{x})$ tiene que estar en un plano, pues, si no, para cada x suficientemente poco alejado de $\bar{x}$ existiría $T(x)$, en contra de la definición de $\bar{x}$; por tanto, $0=f(x)<\bar{x}$, de donde, junto con $f(0)>0$, se desprende la existencia de un $x<\frac{\pi}{a}$ con $f(x)=x$, con lo cual queda probada la afirmación intermedia. Para el número x determinado por la condición $f(x)=x$, el teatraedro $T(x)$ tiene aristas de longitud $a_{i,x}$ y una esfera circunscrita de radio $\frac{1}{x}$. Por tanto, y puesto que $x<\frac{\pi}{a_i}$, los vértices de $T(x)$ en la esfera circunscrita están separados por longitudes de arco a_i, de modo que sobre esta esfera existe un cuádruplo de puntos congruente con los cuatro puntos dados.

Introducción a: *Sobre la axiomatización del concepto de estar entre por Wald*

Como la anterior, esta comunicación fue presentada por Gödel en la 42 sesión del coloquio matemático de Menger (celebrada en Viena el 18 de febrero de 1932). Menger había introducido una definición métrica del concepto de estar entre (según la cual el punto *b* está entre *a* y *c* si y sólo si la suma de las distancias $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$ es igual a la distancia $\overline{ac}$). Abraham Wald había axiomatizado esta relación mediante seis postulados. A su vez, Gödel indicó en la comunicación aquí comentada cómo la axiomatización de Wald, adecuadamente reformulada, resulta ser un teorema sobre triplos de números reales. Para ello asigna a cada triplo de puntos *a*, *b*, *c* de un espacio métrico dado el triplo de números reales correspondientes a sus distancias $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$.

El teorema dice que el punto *b* está entre *a* y *c* en el sentido de Menger si y sólo si el triplo de números reales $<\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac}>$ está en la parte del plano $x+y=z$ para la cual tanto *x*, como *y*, como *z*, como $(x+y-z)$ $(x-y+z)$ $(-x+y+z)$ son números reales no negativos.

La comunicación apareció bajo el título *Über die Waldscne Axiomatik des Zwischenbegriffes* (Sobre la axiomatización del concepto de estar entre por Wald) en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, núm. 4 (1931-1932), págs. 17-18, publicado en 1933.

J. M.

SOBRE LA AXIOMATIZACION DEL CONCEPTO DE ESTAR ENTRE POR WALD

En su axiomatización del concepto de estar entre, Wald [1931 y 1932] prueba que tres puntos *a*, *b*, *c* están en una relación definida para todos los triplos de puntos de todos los espacios métricos y que satisface ciertas condiciones si y sólo si la relación $ab+bc=ac$ vale para las distancias entre ellos, es decir, si *b* está entre *a* y *c* en el sentido de Menger. Entre las condiciones impuestas a la relación se encuentra la de invariancia bajo congruencia, es decir, si tres puntos *a*, *b*, *c* están en dicha relación, entonces cualesquiera tres puntos a', b', c' congruentes con ellos han de estar también entre sí en esa relación. Puesto que la totalidad de todos los triplos congruentes con el triplo de puntos *a*, *b*, *c* está caracterizada por las tres distancias *ab*, *bc*, *ac*, la axiomatización por Wald del concepto de estar entre se puede expresar como un teorema sobre triplos de números reales, con otras palabras, sobre el espacio cartesiano tridimensional. Obtenemos ese teorema, asignando a cada triplo métrico de puntos *a*, *b*, *c* el punto

$$x=ab,\ y=bc,\ z=ac \qquad (+)$$

de $\mathbb{R}^3$. Puesto que la desigualdad del triángulo vale para *a*, *b*, *c* y

puesto que las distancias son no negativas, sólo aparecen puntos de $\mathbb{R}^3$ para los que valen las desigualdades

$$(*) \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ (x+y-z)\,(x-y+z)\,(-x+y+z) \geqslant 0$$

b está entre a y c si y sólo si el punto x, y, z asignado al triplo a, b, c está en la parte del plano $x+y=z$ contenida en el subespacio (*). A la axiomatización de Wald corresponde, pues, el siguiente teorema:

Sea M un subconjunto del subespacio (*) de $\mathbb{R}^3$ con las siguientes propiedades:

1. Si el punto x, y, z está en M, también lo está el punto y, x, z.

2. Si el punto x, y, z está en M, entonces el punto z, y, x no está en M.

3. Si los puntos u, v, w y w, x, y están en M, entonces para cada z, si los puntos u, z, y y v, x, z están en el subespacio (*), entonces están también en M.

4. Para cada $\bar{z}>0$ existe al menos un punto x, y, $\bar{z}$ en M.

5. Para cada $\bar{z}>0$, el conjunto que consta de los puntos 0, $\bar{z}$, $\bar{z}$ y $\bar{z}$, 0, $\bar{z}$ y de todos los puntos x, y, $\bar{z}$ de M es cerrado.

Entonces M es la parte del plano $x+y=z$ que satisface las desigualdades (*).

Este teorema nos sugiere considerar para espacios métricos en general la aplicación definida por (+) de sus triplos de puntos en $\mathbb{R}^3$.

Introducción a: *Sobre la axiomatización de las relaciones de conexión en geometría elemental*

En la 51 sesión del coloquio matemático de Menger (celebrada el 25 de mayo de 1932) hubo una discusión general sobre la axiomatización de las relaciones de conexión en geometría elemental. Menger trataba de dar una fundamentación algebraica a la geometría proyectiva, basándola en dos operaciones de unión e intersección y una relación binaria de inclusión o incidencia entre elementos indefinidos. Los puntos, por ejemplo, quedaban definidos como los elementos sin partes propias no vacías. Gödel observó que tales definiciones no podían ser formuladas en forma normal sin cuantificadores existenciales. De hecho, por aquel entonces se estaba fraguando la teoría de retículos, sobre todo desde el descubrimiento de que el retículo de los subespacios lineales de la geometría proyectiva no era distributivo y, por tanto, que la distributividad no era una característica de los retículos. La palabra alemana para retículo (*Verband*) fue introducida en 1932 y la inglesa (*lattice*) en 1933. La sugerencia de Gödel de estudiar los principios formulables en forma normal sin cuantificadores conduce a los retículos modulares. Las geometrías proyectivas son retículos modulares complementados, y la complementación no puede formularse sin cuantificadores existenciales en forma normal.

La observación de Gödel apareció bajo el título *Zur Axioma-*

tik der elementargeometrischen Verknüpfungsrelationen (Sobre la axiomatización de las relaciones de conexión en geometría elemental), en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, núm. 4 (1931-32), pág. 34, publicado en 1933.

 J. M.

SOBRE LA AXIOMATIZACION DE LAS RELACIONES DE CONEXION EN GEOMETRIA ELEMENTAL

Habría que investigar el sistema de todas las sentencias sobre retículos que en su forma normal carecen de cuantificadores existenciales. Los conceptos de punto y línea recta, que son definibles usando cuantificadores existenciales (por ejemplo, un punto es un elemento para el que no existe un elemento no-vacío que sea parte propia de él), son indefinibles en este sistema más restringido. Investigaciones en esta dirección se encuentran ya en Wernick [1929].

Introducción a: *Sobre la teoría de números y la aritmética intuicionista*

La lógica y la aritmética intuicionistas surgieron en parte como reacción a la presunta amplitud y peligrosidad excesivas de la lógica y la aritmética clásicas. La lógica y la aritmética intuicionistas serían más reducidas, más exigentes, más estrictas y, por ello, menos peligrosas. Con la lógica y aritmética clásicas quizá uno podría perderse y caer en contradicciones; con las intuicionistas eso estaba excluido. Y, en efecto, si procedemos a la traducción directa de los conectores intuicionistas $-$, Δ, ∇, $\supset$, por los conectores clásicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, y a la identificación de los cuantificadores y signos aritméticos de ambas lógicas y aritméticas, resulta que cada fórmula intuicionistamente válida se convierte en una fórmula clásicamente válida, pero no a la inversa. La lógica y la aritmética intuicionista resultan así ser más reducidas que las clásicas, y el conjunto de las fórmulas válidas intuicionistas (traducidas) resulta ser un subconjunto propio del de las fórmulas válidas clásicas, como era de esperar. De todos modos la traducción antes indicada no es la única traducción posible. Si uno adopta otras, hechos inversos y sorprendentes salen a la luz.

Adoptando ciertas traducciones alternativas, ya Kolmogorov en 1925 y Glivenko en 1929 habían probado que de algún modo la lógica conectiva intuicionista incluye la clásica. Las considera-

ciones de Kolmogorov se publicaron en ruso y no fueron divulgadas en otras lenguas hasta mucho más tarde, cuando ya habían sido superadas por los resultados más precisos de Gödel, que sí conocía, sin embargo, el trabajo de Glivenko, del que hizo uso.

En una ponencia presentada el 28 de junio de 1932 ante el coloquio matemático de Viena, Gödel mostró que si φ es una fórmula conectiva clásicamente válida construida con los solos conectores $\neg$ y $\wedge$, entonces la traducción directa (es decir, $\neg$ por $-$ y $\wedge$ por Δ) de φ es una fórmula intuicionistamente válida. Y puesto que los demás conectores clásicos ($\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) son definibles en función de $\neg$ y $\wedge$, resulta que el conjunto de las fórmulas válidas de la lógica conectiva clásica (así reescritas y traducidas) es un subconjunto del conjunto de las fórmulas válidas de la lógica conectiva intuicionista. Pero en la citada ponencia Gödel hizo más que eso. Probó además el sorprendente resultado de que la totalidad de la aritmética formal clásica (que incluye la lógica clásica de primer orden) puede incluirse en la aritmética intuicionista, adaptando la siguiente traducción: donde la aritmética formal clásica escribe $\neg$, $\wedge$, $\forall$, en la traducción escribimos también $-$, Δ, $\forall$. Donde la aritmética formal clásica escribe $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\exists x \ \varphi$ en la traducción escribimos $-(-\varphi \Delta - \psi)$, $-(\varphi \Delta - \psi)$ y $-\forall x - \varphi$, respectivamente. Los signos aritméticos se mantienen. Para desarrollar su prueba de un modo preciso, Gödel toma dos sistemas formales concretos y explícitos: el sistema formal de aritmética clásica de Herbrand y el sistema formal de aritmética intuicionista de Heyting (con ciertas ampliaciones intuicionistamente aceptables). A continuación, para cada fórmula φ de la aritmética clásica construye Gödel su traducción φ' en la aritmética intuicionista, y demuestra que si φ es deducible en la aritmética formal clásica (de Herbrand), entonces φ' es deducible en la aritmética formal intuicionista (de Heyting). De ahí resulta que todas las afirmaciones de la aritmética clásica son también (aunque bajo otro disfraz o interpretación) afirmaciones de la aritmética intuicionista. Este resultado fue todavía simplificado en 1936 por Gentzen, que probó lo mismo, pero sin necesidad de parafrasear $\varphi \rightarrow \psi$ por $-(\varphi \Delta - \psi)$, es decir, traduciendo también directamente $\varphi \rightarrow \psi$ por $\varphi \supset \psi$.

La demostración de que todo teorema de la aritmética clásica (traducido) es también un teorema de la aritmética intuicionista proporciona de pasada una prueba de consistencia relativa de la aritmética (y de la lógica) clásica respecto a la intuicionista. Cualquier contradicción de la aritmética clásica sería trasladable a la intuicionista. Si la primera fuese contradictoria, también lo sería la segunda. Por tanto, si estamos seguros de que la aritmética intuicionista es consistente, también podemos estarlo de que lo es la clásica. A pesar de las apariencias, no hay diferencia de amplitud ni de riesgo entre ambas.

La ponencia de Gödel apareció bajo el título *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlenthorie* (Sobre la teoría de los números y la aritmética intuicionista) en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, núm. 4 (1931-1932, publicado en 1933), págs. 34-38. Hay traducción inglesa de Martin Davis en Davis [1965], págs. 75-81.

J. M.

SOBRE LA TEORIA DE NUMEROS Y LA ARITMETICA INTUICIONISTA

Si a las nociones primitivas de la lógica conectiva de Heyting[1] hacemos corresponder las homónimas de la lógica clásica y al «absurdo» ($-$), la negación ($\neg$), entonces el cálculo conectivo intuicionista H aparece como un subsistema propio del cálculo usual A. Pero si establecemos otra correspondencia (o traducción) de las nociones, ocurre lo contrario: *el cálculo conectivo clásico es un subsistema del intuicionista.* Pues toda fórmula construida sólo de conyunciones (Δ) y negaciones ($-$) y correspondiente a una fórmula válida en A es también deducible en H. En efecto, cada tal fórmula debe tener la forma $-\varphi_1 \Delta -\varphi_2 \Delta \dots \Delta -\varphi_n$, y si es válida en A, entonces también lo es cada $-\varphi_i$; entonces, según Glivenko[2], $-\varphi_i$ es también deducible en H y, por tanto, también la conyunción de los $-\varphi_i$. De aquí se sigue que, si traducimos las nociones clásicas

$$\neg p,\ p \rightarrow q,\ p \vee q,\ p \wedge q$$

por las siguientes nociones intuicionista

$$-p,\ -(p \Delta -q),\ -(-p \Delta -q),\ p \Delta q,$$

[1] Heyting [1930]: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik (citado en lo que sigue como H_1).

[2] Glivenko [1929]: Sur quelques points de la logique de M. Brouwer.

entonces cada fórmula clásicamente válida es también válida en H.

La finalidad de la presente investigación consiste en probar que algo análogo ocurre *con la totalidad de la aritmética y la teoría de números*, tal como está dada, por ejemplo, por los axiomas de Herbrand[3,4]. También aquí es posible ofrecer una interpretación de las nociones clásicas en términos de las intuicionistas, de tal modo que todos *los axiomas clásicos se convierten en sentencias deducibles del sistema intuicionista.*

Tomamos como *signos primitivos* del sistema de Herbrand:

1. Los conectores: $\neg$, $\rightarrow$, $\vee$, ...
2. Variables numéricas: x, y, z, ...
3. El cuantificador universal: $\forall$.
4. $=$.
5. 0 y $+1$.
6. El conjunto infinito numerable de signos funtoriales f_i, introducidos de acuerdo con el grupo de axiomas C, a cada uno de los cuales está asociado un número natural n_i (el número de argumentos de f_i).

A fin de precisar cómo hemos de construir las fórmulas a partir de esos signos primitivos, definimos previamente la noción de término numérico mediante la siguiente definición recursiva:

1. 0 y todas las variables x, y, ..., son términos numéricos.
2. Si τ es un término numérico, también lo es $\tau + 1$.
3. Si $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_i}$, son términos numéricos, también lo es $f_i(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_i})$.

Por una *fórmula elemental* entendemos expresiones de la forma $\tau_1 = \tau_2$, donde τ_1 y τ_2 son términos numéricos. Fórmulas de la teoría de números –llamadas en lo que sigue *fórmulas numéricas*– son o bien fórmulas elementales o expresiones

[3] Herbrand [1931]: Sur la no-contradiction de l'arithmétique.

[4] El resultado obtenido por Glivenko en el trabajo citado para el cálculo conectivo no puede ser extendido a la teoría de números.

construidas a partir de las fórmulas elementales usando los conectores y el cuantificador universal $\forall$.

A los grupos *A-D* de axiomas de Herbrand añadimos los *grupos E-G de axiomas lógicos* (que Herbrand no introdujo explícitamente):

E. Cada expresión que resulta de sustituir las variables sentenciales por fórmulas numéricas en una fórmula válida (es decir, una tautología) de la lógica conectiva es un axioma.

F. Todas las fórmulas de la forma $\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(\tau)$, donde $\varphi(x)$ es una fórmula numérica cualquiera y τ es un término numérico, son axiomas (con la restricción obvia de que las variables que aparezcan en τ no pueden estar ligadas en $\varphi(x)$).

G. Todas las fórmulas de la forma $x = y \rightarrow (\varphi(x) \rightarrow \varphi(y))$ (donde $\varphi(x)$ es una fórmula numérica cualquiera) son axiomas.

Tomamos como *reglas de inferencia:*

I. A partir de α y $\alpha \rightarrow \beta$ puede inferirse β.

II. A partir de $\alpha \rightarrow \beta$ puede inferirse $\alpha \rightarrow \forall x \beta$, si x no aparece libre en α.

En F, G y regla II x, y denotan variables cualesquiera.

A diferencia del sistema de Herbrand, el de Heyting[5] carece de variables numéricas y posee sólo variables x, y, ..., para individuos cualesquiera. Esto conlleva ciertas complicaciones que vamos a evitar introduciendo variables x', y', z', ..., para números naturales en el sistema de Heyting. Así, la fórmula $\forall x' \varphi(x')$ será equivalente a $\forall x (x \in N \supset \varphi(x))$, y una fórmula $\alpha(x', y', \ldots)$, en que las variables x', y', ..., aparecen libres, será equivalente a $x, y, \ldots, \in N \supset \alpha(x, y, \ldots)$[5a]. Así, cada sentencia que contenga variables de esta nueva especie es equivalente a otra que sólo contiene variables normales. Usando las reglas de traducción indicadas puede mostrarse formalmente que prácticamente todos los teoremas de H_2, §5, §6 siguen siendo válidos.

[5] Heyting [1930 a]: Die formalen Regeln der intuitionistichen Mathematik (citado en lo que sigue como H_2).

[5a] Está claro cómo $\exists x'$ podría ser definido; pero no lo vamos a usar en lo que sigue.

En especial esto ocurre con todos los teoremas que son usados en lo que sigue: H_2 5.4, 5.5, 5.8, 6.26, 6.3, 6.4, 6.78, donde, sin embargo, en 5.4 es necesario reemplazar $p=p$ por $p' \in N$. En los teoremas de H_2, § 10, las hipótesis $p \in N$, $q \in N$, etc., pueden ser eliminadas al introducir variables numéricas.

La definición de funciones numéricas por recursión es intuicionistamente aceptable (véase H_2, 10.03, 10.04). Entonces las funciones f_i (grupo C de axiomas) aparecen también en la matemática intuicionista y nosotros añadimos sus fórmulas definitorias a los axiomas de Heyting. También añadimos las fórmulas del grupo D, que obviamente son intuicionistamente válidas. Llamamos H' al sistema de Heyting así extendido. Ahora asignamos a cada fórmula numérica φ una fórmula φ' de H' (su «traducción») de acuerdo con las siguientes estipulaciones: las variables x, y, ..., deben ser traducidas como x', y', ...; cada f_i, por el signo homónimo f_i de H'; $=$ por $=$; 0 por 1[6]; $+1$ por seq; los conectores lógicos, como indicamos anteriormente. $\forall x \varphi$ será traducido por $\forall x' \varphi'$, donde φ' es la traducción de φ. Una fórmula que es la traducción de una fórmula numérica será llamada una fórmula H' -numérica.

Hemos de probar:

Teorema I: *Si la fórmula φ es deducible en el sistema de Herbrand, entonces su traducción φ' es deducible en H'.*

Lema 1: *Para cada fórmula H'-numérica φ'*

$$(1) \qquad - - \varphi' \supset \varphi'$$

es deducible en H'.

Prueba por inducción completa:

α) (1) vale en el caso de que φ sea una fórmula elemental, pues para términos numéricos τ tenemos $\tau' \in N$, como puede mostrarse de modo análogo a H_2 10.4. Por tanto, por H_2 10.25 para fórmulas elementales tenemos $\varphi' \nabla - \varphi'$, de donde obtenemos (1) por H_1 4.45.

[6] En el sistema de Heyting la serie numérica empieza por 1.

β) Si (1) vale para dos fórmulas H'-numéricas φ' y ψ', entonces también vale para $\varphi' \Delta \psi'$. Pues, por H_1 4.61, tenemos $- - (\varphi' \Delta \psi') \supset - - \varphi' \Delta - - \psi'$ y por tanto, por la hipótesis inductiva y por H_1 2.23:

$$- - (\varphi' \Delta \psi') \supset \varphi' \Delta \psi'.$$

γ) Si (1) vale para φ', entonces también vale para $-\varphi'$. Porque, en general, tenemos $- - - \varphi' \supset -\varphi'$ (por H_1 4.32).

δ) Si (1) vale para φ', entonces también vale para $\forall x' \varphi'$. Prueba: Por hipótesis inductiva, vale $- - \varphi' \supset \varphi'$. Por tanto y por H_2 5.8, $\forall x'(- - \varphi' \supset \varphi')$, y por H_2 6.4, $\forall x' - - \varphi' \supset \forall x' \varphi'$. Por H_2 6.78, tenemos además $- - \forall x' \varphi' \supset \forall x' - - \varphi'$ y de las dos últimas fórmulas obtenemos $- - \forall x' \varphi' \supset \forall x' \varphi'$, q.e.d.

El lema 1 se sigue de $\alpha) - \delta)$, pues cada fórmula H'-numérica se construye a partir de fórmulas elementales mediante las operaciones Δ, $-$, $\forall$.

Lema 2: *Para cualesquiera fórmulas H'-numéricas φ', ψ'*

$$(\varphi' \supset \psi') \supset \subset -(\varphi' \Delta - \psi')$$

vale en el sistema H'.

Prueba: Por H_1 4.9, tenemos

(2) $$(\varphi' \supset \psi') \supset -(\varphi' \Delta - \psi');$$

además tenemos $-(\varphi' \Delta - \psi') \supset (\varphi' \supset - - \psi')$ por H_1 4.52, y, puesto que ψ' es una fórmula H'-numérica, del lema 1 se sigue que $-(\varphi' \Delta - \psi') \supset (\varphi' \supset \psi')$, lo que, junto con (2), proporciona el resultado deseado.

Ahora probamos: la traducción φ' de cada axioma φ del sistema de Herbrand es deducible en H'.

1) Las traducciones de los axiomas del grupo A son sentencias equivalentes, por el lema 2, a $H_2$10.2, 10.22, 10.221, 10.24, 10.26.

2) La traducción de un axioma del grupo B tiene la forma:

(3) $$-(\varphi(1)\Delta\forall x' -(\varphi(x')\Delta - \varphi(\text{seq } x'))\Delta - \forall x' \varphi(x'))$$

y esto se sigue por el lema 2 de

(4) $$\varphi(1)\Delta\forall x'(\varphi(x') \supset \varphi(\text{seq } x')) \supset \forall x' \varphi(x')$$

porque basta con reemplazar $\varphi \supset \psi$ cada vez por $-(\varphi\Delta - \psi)$. Pero (4) es precisamente H_2 10.14 en nuestra notación.

3) Los axiomas de los grupos C y D fueron añadidos directamente al sistema de Heyting. Los del grupo E se siguen de lo que hemos probado anteriormente sobre el cálculo conectivo de Heyting; los de F se obtienen inmediatamente de H_2 6.3 y 5.4, usando el lema 2, y los de G se obtienen del mismo modo de H_2 6.26 y 10.01.

Nos queda por demostrar que la aplicación de las reglas de inferencia I, II a fórmulas cuyas traducciones en H' son deducibles produce fórmulas para las que ocurre lo mismo. Para la regla I esto significa: si φ' y $(\varphi \rightarrow \psi)'$ son deducibles en H', entonces también lo es ψ', es decir, ψ' es inferible de φ' y $-(\varphi'\Delta - \psi')$. Pero esto se obtiene inmediatamente del lema 2 y H_1 1.3. El resultado correspondiente para la regla II se obtiene del mismo modo de H_2 5.5 y el lema 2.

El teorema I, cuya prueba acabamos de completar, muestra que *la teoría de números y la aritmética intuicionista sólo aparentemente son más reducidas que las versiones clásicas, y de hecho contienen la teoría de números y la aritmética clásicas* (*aunque con una interpretación algo distinta de la usual*). La razón de ello estriba en el hecho de que la prohibición intuicionista de negar sentencias universales para formar sentencias existenciales pierde su eficacia al permitir que el predicado de absurdo sea aplicado a sentencias universales, lo que formalmente conduce a exactamente las mismas sentencias admitidas en la matemática clásica. El intuicionismo sólo parece dar lugar a restricciones genuinas en el análisis y la teoría de conjuntos, y esas restricciones no son resultado de negar el *tertium non datur*, sino más bien de la prohibición de conceptos impredicativos. Desde luego, las

consideraciones precedentes suministran una prueba de consistencia para la teoría de números y la aritmética clásicas. Sin embargo, esta prueba no es «finitaria» en el sentido dado a esta palabra por Herbrand[7], siguiendo a Hilbert.

[7] Herbrand [1930 a]: Les bases de la logique hilbertienne, y [1930]: *Recherches sur la théorie de la démostration.*

Introducción a: *Una interpretación del cálculo conectivo intuicionista*

La lógica intuicionista considera nociones conectivas ($-$, ∇, Δ, $\supset$) distintas que las de la lógica clásica ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$). En una ponencia ante el coloquio matemático de Viena Gödel mostró en 1932 que las nociones y fórmulas de la lógica conectiva intuicionista son traducibles en una cierta expansión de la lógica clásica, de tal modo que si una fórmula φ es deducible en el cálculo intuicionista, entonces su traducción φ' es deducible en el cálculo clásico expandido. Incluso conjeturó que pasase lo mismo en la otra dirección y que, por tanto, una fórmula intuicionista φ fuera deducible en el cálculo intuicionista si y sólo si su correspondiente traducción φ' fuera deducible en el cálculo clásico expandido. Desde entonces se ha probado[1] que la conjetura de Gödel era correcta.

La expansión de la lógica clásica consiste en el añadido de un nuevo conector monario *B*, que puede interpretarse tanto epistémica como modalmente (es decir, «*Bp*» puede leerse como «*p* es demostrable» o como «*p* es necesario»), y de tres axiomas y una regla de inferencia para *B*. Interpretando *B* modalmente, el sistema expandido resulta así ser el sistema de lógica modal S4

[1] Véase Schütte (1968), págs. 38 y 42.

de C. I. Lewis[2]. Por tanto hay una inmersión de la lógica intuicionista en la lógica modal S4 o, si se prefiere, en la correspondiente lógica epistémica.

La ponencia de Gödel apareció bajo el título *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls* (Una interpretación del cálculo conectivo intuicionista) en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* (ed. por K. Menger), núm. 4 (1931-32), págs. 39-40. El texto original está reproducido en la antología de Berka y Kreiser [1971], págs. 187-188.

J. M.
Jesús Mosterín

[2] Véase Lewis & Langford [1932].

UNA INTERPRETACION DEL CALCULO CONECTIVO INTUICIONISTA

Podemos interpretar[1] la lógica conectiva de Heyting mediante las nociones de la lógica conectiva usual y la noción «p es demostrable» (simbolizada por Bp), si aceptamos para esta última el siguiente sistema axiomático Σ:

1. $Bp \rightarrow p.$
2. $Bp \rightarrow (B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq)$
3. $Bp \rightarrow BBp$

Además hay que aceptar los axiomas y reglas de inferencia del cálculo clásico para los signos $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, así como la nueva regla de inferencia: A partir de φ puede inferirse $B\varphi$.

Los signos primitivos de Heyting han de ser traducidos del siguiente modo:

$$
\begin{array}{lcl}
-p & : & \neg Bp \\
p \supset q & : & Bp \rightarrow Bq \\
p \nabla q & : & Bp \vee Bq \\
p \Delta q & : & p \wedge q
\end{array}
$$

[1] Kolmogorov ha ofrecido una interpretación algo diferente de la lógica intuicionista (véase Kolmogorov [1930]), aunque sin precisar del todo el formalismo.

El mismo resultado podríamos obtenerlo traduciendo $-p$ por $B \neg Bp$ y $p \Delta q$ por $Bp \wedge Bq$. La traducción de cualquier fórmula válida del sistema de Heyting se sigue de Σ, pero la traducción de $p \nabla -p$, por el contrario, no se sigue de Σ, ni, en general, la de ninguna fórmula de la forma $B\varphi \vee B\psi$, a no ser que ya $B\varphi$ o $B\psi$ sea deducible de Σ. Conjeturo que una fórmula cualquiera es válida en el cálculo de Heyting si y sólo si su traducción es deducible a partir de Σ.

El sistema Σ es equivalente al sistema de implicación estricta de Lewis, si Bp se traduce por $\Box p$ (véase Parry [1933]) y si el sistema de Lewis se complementa con el siguiente axioma de Becker[2]:

$$\Box p \prec \Box\Box p.$$

Hay que hacer notar que para el concepto «deducible en determinado sistema formal Σ» no valen todas las fórmulas deducibles en Σ. Por ejemplo, nunca vale para ese concepto $B(Bp \rightarrow p)$, es decir, eso no vale para ningún sistema Σ que contenga la aritmética. Pues en caso contrario ocurriría, por ejemplo, que $B(0 \neq 0) \rightarrow 0 \neq 0$ sería deducible en Σ, y por tanto también $\neg B(0 \neq 0)$, es decir, la consistencia de Σ sería demostrable en Σ.

[2] Véase Becker [1930]: *Zur Logik der Modalitäten.*

Introducción a:
Observación sobre aplicaciones proyectivas

En el repetidas veces citado coloquio matemático dirigido por Menger en Viena presentó Gödel el 10 de noviembre de 1932 una pequeña comunicación sobre geometría proyectiva, en la que prueba que cada biyección del plano proyectivo real en sí mismo que transforma cada recta en otra recta es una colineación (o automorfismo del plano afín). La comunicación apareció bajo el título *Bemerkung über projektive Abbildungen* (Observación sobre aplicaciones proyectivas), en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiuns*, núm. 5 (1932-1933), pág. 1.

Jesús Mosterín.

OBSERVACION SOBRE APLICACIONES PROYECTIVAS

Cada aplicación biunívoca f del plano proyectivo real E en sí mismo, que transforma recta en recta, es una colineación. Si para cada cónica del plano designamos como el correspondiente *entorno de la cónica* el conjunto de todos los puntos *p* de *E* tales que cada recta que contiene *p* tiene exactamente dos puntos en común con la cónica, entonces el sistema *K* de todos los entornos de cónicas constituye una cubierta de *E* de finura ilimitada[1]. Puesto que toda cónica puede ser generada por dos haces de rectas que estén interrrelacionados por una correspondencia proyectiva (es decir, mediante una cadena finita de perspectivas), y puesto que haces de rectas interrelacionados perspectivamente se transforman en cada aplicación biunívoca que transforma recta en recta en haces de rectas interrrelacionados perspectivamente, resulta que la aplicación *f* aplica cada cónica a una cónica. Además, debido a la biunivocidad de *f* y a la anterior definición del entorno de una cónica, cada entorno de una cónica se transforma por *f* en un entorno de una cónica. Según esto, *K* se transforma por *f* en sí mismo. Puesto que *K* es una cubierta de *E* de finura ilimitada, *f* es una aplicación *continua* y, por tanto, por un teorema fundamental de la geometría proyectiva, una colineación.

[1] Así se llama según Menger una familia de conjuntos abiertos, en la cual para cada punto *p* del espacio y para cada entorno *U* de *p* existe un conjunto abierto incluido en *U* que contiene *p*.

Introducción a:
Discusión sobre geometría diferencial sin coordenadas

En la 63 sesión del coloquio matemático de Menger (celebrado el 17 de mayo de 1933), K. Menger, A. Wald y K. Gödel presentaron una comunicación conjunta, que de hecho es el único artículo escrito por Gödel en colaboración con otros autores. Representa una contribución al programa de Menger de simplificar la geometría diferencial, eliminando la engorrosa necesidad de coordenadas. Aquí se trata de precisar (sin referencia a coordenadas) la afirmación de que los espacios de Riemann se comportan localmente como espacios euklídeos. Los autores introducen para ello los «determinantes de volumen» $D(p_1, p_2, p_3, p_4)$ de cuádruplos métricos de p_1, p_2, p_3, p_4, y sugieren que la convergencia fuerte hacia 0 de estos determinantes puede aclarar el comportamiento localmente euklídeo de las superficies de Gauss.

La comunicación de Menger, Wald y Gödel apareció bajo el título *Diskussion über koordinatenlose Differentialgeometrie* (Discusión sobre geometría diferencial sin coordenadas), en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, núm. 5 (1932-33), págs. 25-26.

Jesús Mosterín

DISCUSION SOBRE GEOMETRIA DIFERENCIAL SIN COORDENADAS

Para precisar, en el sentido del programa desarrollado por Menger [1930, véase también 1932] para una geometría diferencial sin coordenadas, el enunciado de que los espacios de Riemann se comporten localmente como espacios euklídeos (que «la geometría euklídea vale para puntos infinitesimalmente próximos de espacios de Riemann»), serían adecuados los determinantes («determinantes de volumen») que sirven para caracterizar la métrica de los espacios euklídeos. Si para cuatro puntos p_1, p_2, p_3, p_4 de un espacio métrico establecemos

$$D(p_1, p_2, p_3, p_4) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (p_i p_j)^2 \end{vmatrix}_{(i,j=1,\,2,\,3,\,4)}$$

donde $p_i p_j$ denota la distancia entre p_i y p_j, entonces, de acuerdo con Menger [1928, pág. 113, y 1931] el plano está caracterizado entre los espacios métricos por ser completo, convexo y convexo hacia fuera y por el hecho de que, para cualesquiera cuatro de sus puntos vale que $D(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$. Para caracterizar las superficies de Gauss habría que invocar en vez de esto el hecho de que, para los cuádruplos de puntos que convergen hacia un punto, el valor de *D converge fuertemente* (es decir, como ciertas

potencias de las distancias) *hacia* 0. Si denotamos con $S_n(p_1, p_2, p_3, p_4)$ la forma de las potencias n-ésimas de las seis distancias $p_i p_j$, vale el siguiente teorema: si F es una superficie en $\mathbb{R}^3$ que está dada en representación paramétrica mediante funciones dos veces continuamente diferenciables $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u, v)$ y si el punto p_0 corresponde a los valores u_0, v_0 de los paránetros para los cuales uno de los jacobianos, por ejemplo $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, no desaparece, entonces, si $\{p_1^n\}$, $\{p_2^n\}$, $\{p_3^n\}$, $p_4^n\}$ ($n = 1$, 2, ..., hasta el infinito) son cuatro sucesiones cualesquiera de puntos de F convergentes hacia p_0, vale la relación

$$\lim_{n=\infty} \frac{D(p_1^n, p_2^n, p_3^n, p_4^n)}{S_6(p_1^n, p_2^n, p_3^n, p_4^n)} = 0$$

Introducción a:
Sobre el problema de la decisión de la lógica de primer orden

El problema de la decisión de la lógica de primer orden es insoluble en general (desde 1936, en que lo probó Church, sabemos que el conjunto de las fórmulas satisfacibles es indecidible), pero admite soluciones parciales, tanto positivas (descubrimiento de clases decidibles de fórmulas satisfacibles y construcción de algoritmos de decisión para ellas) como negativas (prueba de que ciertas clases de fórmulas satisfacibles son indecidibles). Las clases de fórmulas consideradas agrupan fórmulas del mismo nivel de complejidad. Hay muchas maneras de definir esa complejidad. Una de ellas estriba en limitarse a fórmulas prenexas (con lo cual no perdemos nada, pues toda fórmula es equivalente a una fórmula prenexa) y dividirlas de acuerdo con su prefijo (es decir, según los cuantificadores con que se inician).

Ya en 1930 se había ocupado Gödel del problema de la decisión de la lógica de primer orden. En 1933 colvió a ocuparse de él con mayor profundidad, obteniendo dos resultados, uno positivo y otro negativo.

El resultado positivo (teorema I) consiste en que cada fórmula prenexa con sólo dos cuantificadores universales (y éstos seguidos) en su prefijo, si es satisfacible (sobre un dominio cualquiera, posiblemente infinito), ya es satisfacible también

sobre un dominio finito de individuos. Ahora bien, el que una fórmula sea satisfacible o no sobre un dominio finito determinado de individuos es siempre decidible (considerando cada una de las posibilidades, pues sólo hay un número finito de éstas). Por tanto, el teorema I implica que la clase de todas las fórmulas prenexas satisfacibles con sólo dos cuantificadores universales seguidos es decidible, es decir, que hay un procedimiento automático para decidir en un número finito de pasos si cualquier fórmula dada con sólo dos cuantificadores universales seguidos es satisfacible o no (resultado ya anticipado por Gödel en 1930). Este resultado positivo queda probado para las fórmulas de la lógica pura (es decir, sin identidad) de primer orden. Al final del artículo Gödel afirma que por el mismo procedimiento puede probarse el teorema I para fórmulas con identidad. Pero eso no es cierto. El teorema I sólo puede ser probado para fórmulas con identidad por procedimientos completamente distintos. A Gödel casi nunca le fallaba su seguro instinto lógico, pero en este caso le falló. Para una clarificación de la situación, véase Goldfarb [1980].

El resultado negativo (teorema III) consiste en probar que la clase de todas las fórmulas prenexas con tres cuantificadores universales seguidos y un número cualquiera de cuantificadores existenciales constituye una clase de reducción. Se dice que una clase A de fórmulas puras de primer orden constituye una clase de reducción si y sólo si para cada fórmula φ de la lógica pura de primer orden se puede encontrar (de un modo automático y preestablecido) una fórmula $\varphi' \in A$, tal que φ es satisfacible si y sólo si φ' es satisfacible. Por tanto, si el conjunto de las fórmulas satisfacibles de una clase de reducción fuese decidible, el problema de la decisión de la lógica de primer orden sería soluble en general y en sentido positivo. En efecto, dada una fórmula cualquiera φ, bastaría con encontrar efectivamente su fórmula correspondiente $\varphi' \in A$ y decidir si φ' es satisfacible o no. Si φ' es satisfacible, también lo es φ. Hemos llamado negativo a este resultado, pues implica que la clase de las fórmulas prenexas satisfacibles con tres cuantificadores seguidos en su prefijo es indecidible (ya que el conjunto de fórmulas satisfacibles de primer orden es indecible, como se descubriría tres años más tarde).

El artículo de Gödel apareció en 1933 bajo el título *Zum*

Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls (Sobre el problema de la decisión de la lógica de primer orden) en la revista *Monantshefte für Mathematik und Physik*, 40, págs. 433-443.

Jesús Mosterín

SOBRE EL PROBLEMA DE LA DECISION DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN

En *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* (fascículo 2, pág. 27) [[véase pág. 37 de este libro]] he esbozado un procedimiento mediante el cual para cada fórmula de la lógica pura de primer orden[1] que en forma normal prenexa contenga dos cuantificadores universales (que además vayan juntos) se puede decidir si es satisfacible[2] o no. L. Kalmar ha tratado luego el mismo caso del problema de la decisión de un modo detallado, usando el mismo método[3]. En el caso de las fórmulas con un solo cuantificador universal, ya anteriormente tratado por P. Bernays, M. Schönfinkel y W. Ackermann, ha resultado que tales fórmulas, si son satisfacibles, ya son satisfacibles en un dominio finito de individuos. La siguiente investigación persigue como fin el mostrar que esto también es así en el caso de dos cuantificadores universales. En segundo lugar mostraremos que la solución del caso siguiente en cuanto a complicación (el de tres

---

[1] Véase Hilbert-Ackermann [1928]: *Grundzüge der theoretischen Logik*, págs. 43 y sigs.

[2] «Satisfacible», a secas, significa que hay un dominio de individuos en el que la fórmula es satisfacible, lo cual a su vez significa lo mismo que: la fórmula es satisfacible en un dominio infinito numerable de individuos.

[3] Véase Kalmar [1932], pág. 466. Parte de la terminología aquí usada procede de ese trabajo.

cuantificadores universales) ya sería equivalente con la solución del problema de la decisión entero (véase pág. 142).

En el tratamiento de la primera de esas dos cuestiones podemos limitarnos a fórmulas numéricas de la forma[3a]:

(1) $$\forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_m \quad \alpha(x_1 x_2 y_1 y_2 \cdots y_m),$$

puesto que el caso en que algunos cuantificadores existenciales preceden a los cuantificadores universales puede ser reducido al anterior (véase el trabajo citado en la nota (3), pág. 478). Supongamos que en (1) aparecen las variables predicativas F_1, $F_2, \cdots, F_s$, y que la variable F_i es r_i-aria. Llamemos un modelo sobre D a un sistema de s relaciones $R_1, R_2, \ldots, R_s$ (r_1-aria, r_2-aria, ..., r_s-aria, respectivamente) definidas sobre D. Las relaciones R_i de un modelo $\mathcal{M}$ las designamos también como $R_i^{\mathcal{M}}$ y con $\alpha_{\mathcal{M}}$ designamos el resultado de sustituir en α las variables predicativas F_i por las relaciones $R_i^{\mathcal{M}}$ del modelo $\mathcal{M}$. Un modelo sobre el dominio de los números naturales $\leqslant k$ se llamará una tabla de orden k. Naturalmente sólo hay un número finito de tablas de orden k. Si $\mathcal{M}$ es un modelo sobre D y $a_1, a_2, \cdots, a_k$ son cualesquiera elementos de D, designamos mediante $[\mathcal{M}/a_1 a_2 \cdots a_k]$ a la tabla T de orden k, para la que vale

$$R_j^T i_1 i_2 \cdots i_{rj} \leftrightarrow R_j^{\mathcal{M}} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{rj}}$$

para $j = 1, 2 \ldots s$ y para cada r_j-tuplo de números naturales $i_1 i_2 \cdots i_{r_j}$ del intervalo $[1 \ldots k]$.

Hemos de empezar por probar el

Teorema I: *Si* (1) *es satisfacible, también es satisfacible en un dominio finito de individuos.*

Evidentemente (1) implica la siguiente fórmula:

(2) $$\forall x_1 \exists z_1 \exists z_2 \cdots \exists z_m \quad \alpha(x_1 x_1 z_1 z_2 \cdots z_m).$$

[3a] Las letras α y ψ se refieren en lo que sigue siempre a fórmulas sin cuantificadores.

Por tanto (1) es equivalente a la conyunción de (1) y (2), que tiene la siguiente forma normal:

$$(3)\qquad \forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 \cdots \exists y_m \exists z_1 \cdots \exists z_m \quad (\alpha(x_1 x_2 y_1 \cdots y_m) \wedge \alpha(x_1 x_1 z_1 \cdots z_m)).$$

Estableciendo que $n = 2m$ y $\psi(x_1 x_2 y_1 \cdots y_m z_1 \cdots z_m) =$

$$= \alpha(x_1 x_2 y_1 \cdots y_m) \wedge \alpha(x_1 x_1 z_1 \cdots z_m),$$

en vez de (3) podemos escribir:

$$(4)\qquad \forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_n \quad \psi(x_1 x_2 y_1 y_2 \cdots y_n),$$

y basta con probar el teorema I para (4). Pero para probar que un modelo $\mathcal{M}$ sobre D satisface (4), basta con probar que para cada dos elementos distintos a_1 a_2 de D hay elementos b_1 b_2 $\cdots$ $b_n \in D$, tales que se cumple $\psi_{\mathcal{M}}$ $(a_1 a_2 b_1 \cdots b_n)$, lo que produce cierta simplificación en lo que sigue[4].

Supongamos que la fórmula (4) sea satisfacible por el modelo $\mathcal{M}$ sobre el dominio de individuos D. Construyamos el conjunto $\mathcal{P}$ de todas las tablas de primer orden $[\mathcal{M}/a]$, donde a recorre todos los individuos de D, y el conjunto $\mathcal{Q}$ de todas las tablas de segundo orden $[\mathcal{M}/ab]$, donde a, b, recorren todos los elementos de D de un modo mutuamente independiente. Los conjuntos no vacíos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ satisfacen las siguientes condiciones I y II:

I. Para cada dos tablas $R, S \in \mathcal{P}$ hay una tabla $T \in \mathcal{Q}$, tal que $[T/1] = R$, $[T/2] = S$.

Pues si $R, S \in \mathcal{P}$, hay $a, b \in D$, tales que $R = [\mathcal{M}/a]$, $S = [\mathcal{M}/b]$, y así basta con estipular que $T = [\mathcal{M}/a, b]$.

II. Para cada tabla $R \in \mathcal{Q}$ hay una tabla T de orden $n+2$, tal que: 1) $R = [T/1, 2]$, 2) $\psi_T(1, 2, \ldots, n+2)$ es verdad, 3) para cada número natural $i \leqslant n+2$: $[T/i] \in \mathcal{P}$, y para cada dos números naturales $i, k \leqslant n+2$: $[T/i\ k] \in \mathcal{Q}$.

[4] En mi nota (Gödel [1930 a]) anteriormente citada me olvidé de indicar el paso de la fórmula (1) a la fórmula (4), que, sin embargo, es necesario para que las condiciones de satisfacibilidad allí indicadas sean correctas.

Pues si $R \in \mathscr{Q}$, entonces hay a, $b \in D$, tales que $R = [\mathscr{M}/a\ b]$, y puesto que $\mathscr{M}$ satisface la fórmula (4), hay individuos $c_1\ c_2\ \cdots\ c_n$ de D, tales que $\psi_{\mathscr{M}}(a\ b\ c_1\ c_2\ \cdots\ c_n)$ es verdad, y así basta con establecer que $T = [\mathscr{M}/a\ b\ c_1\ c_2\ \cdots\ c_n]$.

Para probar el teorema I nos queda aún por mostrar:

Teorema II: *Si hay dos conjuntos no vacíos* $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, *de tablas de primer y segundo orden, respectivamente, que cumplen las condiciones I y II, entonces la fórmula* (4) *es satisfacible en un dominio finito de individuos.*

En primer lugar probamos dos lemas.

Lema 1: *Sea M un conjunto finito con k elementos y sea* M^* *el conjunto de los pares ordenados* $< a, b >$[5], *tales que* $a, b \in M$, $a \neq b$; *sea además* $f(k)$ *el mínimo número natural, tal que* M^* *puede ser partido en* $f(k)$ *clases disjuntas dos a dos* $K_1, K_2, \ldots, K_{f(k)}$, *de tal modo que siempre que* $<a, b>$ *y* $<c, d>$ *pertenezcan a la misma clase* K_i, *ocurra que* $a \neq d$ y $b \neq c$. *Entonces*

$$f(k) \leqslant 2\frac{\log k}{\log 2} + 2.$$

Prueba: La función $f(k)$ cumple la inecuación

$$f(2k) \leqslant f(k) + 2. \qquad (5)$$

En efecto, sean M_1, M_2, dos conjuntos disjuntos con k elementos cada uno y $M = M_1 \cup M_2$, sean además $K_1', K_2', \ldots, K_{f(k)}'$ y $K_1'', K_2'', \ldots, K_{f(k)}''$, respectivamente, las subclases de M_1^* y M_2^*, respectivamente, exigidas por el lema. Podemos construir subclases $K_1, K_2, \ldots, K_{f(k)+2}$ de M^* que cumplan la condición del lema, del siguiente modo: Sea $K_i = K_i' \cup K_i''$ para $i = 1, 2, \ldots, f(k)$, además conste $K_{f(k)+1}$ de todos los pares $<a, b>$, tales que $a \in M_1$, $b \in M_2$, y conste $K_{f(k)+2}$ de todos los pares $< a, b >$, tales

5 Designamos el k-tuplo de cualesquiera elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (en este orden) mediante $<a_1, a_2, \ldots, a_k>$, y el conjunto no-ordenado de esos elementos mediante $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

que $a \in M_2$, $b \in M_1$. Puesto que $f(2k)$ es la mínima cantidad posible de clases K_i, con esto queda probado (5). Puesto que además $f(2)=2$, por repetida aplicación de (5) se sigue que $f(2^k) \leqslant 2^k$. Sea ahora n un número natural cualquiera. Pongamos $n=2^r$, $r=\frac{\log n}{\log 2}$. Puesto que $f(k)$ es monótona, tenemos

$$f(n)=f(2^r) \leqslant f(2^{r+1}) \leqslant 2r+2 \leqslant 2\frac{\log n}{\log 2}+2.$$

Lema 2: *Sea Jxy la relación*[6] *definida en el dominio de los números naturales menores o iguales que* 7, *tal que x e y están en esa relación si y sólo si* $x \neq y$ *y* $x-y$ *es resto cuadrático mod.* 7. *Entonces ocurre:* 1) *Jxy y Jyx no se dan nunca simultáneamente* (*asimetría*). 2) *Para cada dos números naturales x,* $y \leqslant 7$ *hay un* $z \leqslant 7$, *tal que Jzx y Jzy*[7].

Lo último significa que la congruencia $x+u^2 \equiv y+v^2$ (mod. 7) siempre es soluble por los y, v, tales que ambos son $\neq 0$ (mod. 7), lo que inmediatamente se ve, si se escribe la congruencia en la forma $(u+v)(u-v) \equiv y-x$ (mod. 7). Mediante $g(x, y)$ designamos el mínimo número z, tal que Jzx y Jzy, de modo que:

3) De $z=g(x, y)$ se sigue Jzx y Jzy.

Ahora procedemos a probar el teorema II. Supongamos, pues, que estén dados dos conjuntos, $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, que cumplan las condiciones I, II (véase pág. 132). De entre las tablas T que según I existen elegimos para cada par R, $S \in \mathscr{P}$ una y la llamamos $d(R\,S)$; igualmente de entre las tablas T de orden $n+2$ existentes según II elegimos para cada $R \in \mathscr{Q}$ una y la llamamos $h(R)$. Para cada R, $S \in \mathscr{P}$ vale por tanto:

(6.1) $$d(R\,S) \in \mathscr{Q}$$

(6.2) $$[d(R\,S)/1]=R$$

[6] La relación J se da entre x e y si $x-y$ tiene uno de los siguientes valores: 1, 2, 4, -3, -5, -6.

[7] En un dominio de menos de 7 elementos no existe una relación que cumpla las condiciones (1) y (2).

(6.3) $$[d(R\,S)/2] = S$$

y para cada $R \in \mathscr{Q}$, y cada $i, j \leqslant n+2$ vale:

(7.1) $$[h(R)/1, 2] = R$$

(7.2) $$\psi_{h(R)}\ (1, 2, \ldots, n+2)$$

(7.3) $$[h(R)/i] \in \mathscr{P}$$

(7.4) $$[h(R)/i\,j] \in \mathscr{Q}$$

Sea q el número de elementos de $\mathscr{Q}$, el número de $\exists$-signos en la fórmula (4) es n. Determínese un número natural L, tal que

(8) $$q\,n\,f(7L) \leqslant L,$$

lo cual es posible, por el lema 1. Queremos definir un modelo que satisfaga la fórmula (4). Su dominio de individuos D sea un conjunto de cuátruplos, tal que un cuátruplo $<x, y, z, u>$ pertenezca a D si $u \in \mathscr{Q}$ y si x, y, z, son números naturales y $x \leqslant 7$, $y \leqslant f(7L)$, $z \leqslant n$. Por tanto, D es un conjunto con $7nq\,f(7L)$ elementos, es decir, según (8) con a lo sumo $7L$ elementos. Las subclases de D determinadas según el lema 1 sean $K_1, K_2, \ldots, K_v$ ($v \leqslant f(7L)$). Mediante $Z\,(a\,b)$ designo el índice i de la clase K_i a la que pertenece el par $<a, b>$ de D^*. Respecto a la terminología hago notar que por un complejo entiendo una secuencia finita de cosas, por tanto un k-tuplo, donde k es un número natural cualquiera. Si a es un complejo, designo con a_i el miembro i-avo de a. Este modo de designación puede iterarse, si los miembros de a son a su vez complejos (por tanto, a_{ik} designa el miembro k-avo del miembro i-avo de a). Con $\bar{a}$ designamos el conjunto de los miembros del complejo a. Si a es un complejo en el que no hay dos miembros idénticos y $x \in \bar{a}$, entonces $N(x, a)$ designará el número que indica la posición que el miembro x ocupa en a.

Un $n+2$-tuplo de elementos de D se llama un E-complejo si $a_1 \neq a_2$ y si hay un $T \in \mathscr{Q}$, tal que

(9) $$a_{i+2} = <g(a_{11}, a_{21}), Z(a_1\,a_2), i, T>$$

para $i=1, 2, \ldots, n$, donde g significa lo mismo que en el lema 2. Para cada E-complejo designo con $A(a)$ el par $<a_1 a_2>$, con $B(a)$ el n-tuplo $<a_3, a_4, \cdots, a_{n+2}>$, y con $\mathcal{Q}(a)$ el elemento T de $\mathcal{Q}$ (unívocamente determinado por a, evidentemente) para el que vale (9) (por tanto, $\mathcal{Q}(a)=a_{i4}$ para $i=3, 4, \ldots, n+2$). *Para cada par de individuos distintos* x, y *de* D *y cada tabla* T *de* $\mathcal{Q}$ *hay evidentemente un* E*-complejo* a, *tal que* $x=a_1$, $y=a_2$, $T=\mathcal{Q}(a)$, pues para encontrar uno basta con determinar a_i (para $i>2$) según (9).

Para la prueba del lema 3 se requieren los siguientes hechos, que uno puede fácilmente comprobar:

(10) Para dos E-complejos a, b, cualesquiera ocurre $B(a)=B(b)$ o $\overline{B(a)}\cap\overline{B(b)}=\varnothing$.

Pues si $g(a_{11}a_{21})=g(b_{11}b_{21})$, $Z(a_1 a_2)=Z(b_1 b_2)$ y $\mathcal{Q}(a)=\mathcal{Q}(b)$, entonces $B(a)=B(b)$, por (9); y en caso contrario, $\overline{B(a)}\cap\overline{B(b)}=\varnothing$.

(11) Si a, b, son E-complejos y x, $y\in D$, entonces los siguientes casos α), β), nunca pueden darse a la vez:

α) $x\in\overline{A(a)}$, $y\in\overline{B(a)}$

β) $y\in\overline{A(b)}$, $x\in\overline{B(b)}$

Pues por (9) se sigue de α) que $y_1=g(a_{11}a_{21})$ y, por tanto, según el lema 2, $Jy_1\ a_{11}$, $Jy_1\ a_{21}$. Pero puesto que en el caso α) $x=a_1$ o $x=a_2$, se sigue que $Jy_1 x_1$. Del mismo modo se sigue de β) $Jx_1 y_1$. Pero según el lema 2 no puede ocurrir a la vez $Jx_1 y_1$ y $Jy_1 x_1$.

De (11) se sigue inmediatamente que $\overline{A(a)}$ y $\overline{B(a)}$ son siempre disjuntos, pues si tuvieran un elemento común x, ocurriría que α) y β) valdrían ambos para $x=y$, $a=b$. Así pues, cada E-complejo consta de $n+2$ elementos distintos y por eso está definido $N(x, a)$ para cada E-complejo a y cada $x\in\bar{a}$.

Lema 3: *Si a, b son dos E-complejos y H un subconjunto de D, para los que vale:*

$$H \subset \bar{a},\ H \subset \bar{b};\quad H \cap \overline{B(a)} \neq \varnothing \qquad (*)$$
$$H \cap \overline{B(b)} \neq \varnothing \qquad (**)$$

entonces $\mathcal{Q}(a) = \mathcal{Q}(b)$ y para cada $z \in H$ es $N(z, a) = N(z, b)$. (Si H tiene al menos 3 elementos, (*) y (**) se cumplen automáticamente).

Prueba: Por (*) hay un $y \in H \cap \overline{B(a)}$ y por (**) hay un $x \in H \cap \overline{B(b)}$. Por (11) no puede ocurrir a la vez $x \in \overline{A(a)}$ y $y \in \overline{A(b)}$. Por eso tiene que ser $x \in \overline{B(a)}$ o $y \in \overline{B(b)}$. Pero en ambos casos $\overline{B(a)} \cap \overline{B(b)} \neq \varnothing$ y, por ello y por (10), $B(a) = B(b)$. De ahí se sigue $\mathcal{Q}(a) = \mathcal{Q}(b)$ (pues $\mathcal{Q}(a)$ sólo depende de los últimos n elementos de a) y $N(z, a) = N(z, b)$ para $z \in H \cap \overline{B(a)}$. Pero si $z \in H \cap \overline{A(a)}$ (y, por tanto, también $z \in \overline{A(b)}$), sólo nos queda por mostrar que no puede ser $z = a_1$, $z = b_2$ ni $z = a_2$, $z = b_1$. Pero si ocurriera uno de esos casos, $< a_1\, a_2 >$ y $< b_1\, b_2 >$ pertenecerían a dos clases K_i diferentes (por definición de K_i), es decir, $Z(a_1\, a_2) \neq Z(b_1\, b_2)$, y por tanto, según (9), $a_{i+2} \neq b_{1+2}$, lo que no puede ser, ya que $B(a) = B(b)$.

Para definir más cómodamente el modelo $\mathcal{M}$ sobre D, que satisfará la fórmula (4), vaya esto por delante. Si T y S son dos tablas de orden k, escribo $T \sim S$, si $R_l^T\ (u) \leftrightarrow R_l^S\ (u)$ para $l = 1, 2, \ldots, s$, y para todos los r_1-tuplos u, tales que $\bar{u} = \{1, 2, \ldots, k\}$ (es decir, en los cuales aparecen realmente todos los números entre 1 y k). De $R = S$ se sigue $R \sim S$, pero la inversa sólo vale para tablas de primer orden. Sea además $D^k (k = 1, 2, \ldots)$ un conjunto de k-tuplos de elementos de D, tales que todos los elementos de cada k-tuplo de D^k son distintos entre sí y que para cada subconjunto C de D que contenga exactamente k elementos hay un y sólo un $u \in D^k$, tal que $C = \bar{u}$. Por tanto, D^k es esencialmente el conjunto de los subconjuntos de k elementos de D, donde para cada tal subconjunto está fijada una ordenación de sus elementos. Fácilmente se comprueban los dos lemas siguientes:

Lema 4: *Si a cada $u \in D^k$ asignamos una tabla T_u de orden k, y*

lo hacemos simultáneamente para $k = 1, 2, ..., r$ *(donde* r *es un número natural cualquiera), entonces hay un modelo* $\mathscr{Q}$ *sobre* D, *para el que vale*

$$(12) \qquad [\mathscr{M}/u] \sim T_u$$

para cada $u \in (D^1 \cup D^2 \cup ... \cup D^r)$.

Pues por la relación (12) quedan determinados (para cualquier u fijo) los valores veritativos de los R_i'' para todos los tales r_i-tuplos de argumentos v, tales que $\bar{v} = \bar{u}$, y para dos u diferentes siempre se trata también de r_i-tuplos distintos de argumentos.

Lema 5: *Si* T *es una tabla de orden* k, a *es un* k*-tuplo de elementos de* D *y* $\mathscr{M}$ *es un modelo sobre* D, *entonces la ecuación* $[\mathscr{M}/a_1 a_2 ... a_k] = T$ *se sigue de que* $[\mathscr{M}/a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_p}] \sim [T/i_1 i_2 ... i_p]$ *para todos los* $i_1 i_2 ... i_p$, *para los que* $<a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_p}> \in D^p$ *y* $\{a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_p}\} \subset \bar{a}$.

Ahora especializamos las relaciones (12) del lema 4 del siguiente modo:

A) Sea $x \in D$:

I. Si hay E-complejos a, tales que $x \in \overline{B(a)}$, entonces elijamos uno cualquiera de estos E-complejos a y establezcamos

$$(13) \qquad [\mathscr{M}/x] = [h(\mathscr{Q}(a))/N(x, a)]$$

II. Si no hay tales E-complejos, determinemos $[\mathscr{M}/x] = V$, donde V es un elemento cualquiera de $\mathscr{P}$.

Por (7.3) ocurre también en el primer caso, y por tanto siempre, que $[\mathscr{M}/x] \in \mathscr{P}$.

B) Sea $<x, y> \in D^2$:

I. Si hay E-complejos, tales que $\{x, y\} \subset \bar{a}$ y $\{x, y\} \cap \overline{B(a)} \neq \emptyset$ y además tales que para las tablas $[\mathscr{M}/x]$ y $[\mathscr{M}/y]$ (ya determinadas por la convención A)) vale lo siguiente:

$$(14) \qquad \begin{array}{l} [\mathscr{M}/x] = [h(\mathscr{Q}(a))/N(x, a)], \\ [\mathscr{M}/y] = [h(\mathscr{Q}(a))/N(y, a)], \end{array}$$

entonces elijamos uno cualquiera de estos E-complejos a y establezcamos

(15) $$[\mathscr{M}/x\,y] \sim [h(\mathscr{Q}(a))/N(x\,a),\ N(y\,a)].$$

II. Si no hay ningún E-complejo con las propiedades requeridas en B)I, sea

(16) $$[\mathscr{M}/x\ y] \sim d([\mathscr{M}/x],\ [\mathscr{M}/y])$$

C) Sea $<x_1\,x_2 \cdots x_k> \in D^k$, $k > 2$:

I. Si hay E-complejos a, tales que $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k\} \subset \bar{a}$, elijamos uno de ellos y establezcamos

(17) $$[\mathscr{M}/x_1\,x_2 \cdots x_k] \sim [h(\mathscr{Q}(a))/N(x_1\,a),\ N(x_2\,a) \cdots N(x_k\,a)]$$

II. Si no hay ningún tal E-complejo, sea $[\mathscr{M}/x_1\ x_2\ \cdots\ x_k] \sim W$, donde W es una tabla cualquiera de orden k.

El así definido modelo $\mathscr{M}$ cumple lo siguiente:

(18) Las relaciones (13), (15) o (17), respectivamente, se dan para todos los E-complejos a que tienen las propiedades requeridas en A)I, B)I o C)I, respectivamente.

Pues identificando en el lema 3 H con $\{x\}$, $\{x,\ y\}$ o $\{x_1\ x_2\ \cdots\ x_k\}$, respectivamente, se comprueba que los lados derechos de (13), (15) o (17), respectivamente, son iguales para todos los tales a.

Lema 6: *Si $x,\ y \in D$, $x \neq y$, entonces* $[\mathscr{M}/x,\ y] \in \mathscr{Q}$.

Prueba: Si $<x,\ y> \in D^2$ y $<x,\ y>$ está en el caso B)I, entonces, por (14) y (15), ocurre que

$$[\mathscr{M}/y,\ x] = [h([\mathscr{M}/y,\ x])/1,\ 2]$$

y la tesis se sigue de (7.4). Si $<x,\ y> \in D^2$ y $<x,\ y>$ está en el caso B)II, entonces por (16), (6.2) y (6.3) ocurre que

$$[\mathscr{M}/x,\ y] = d([\mathscr{M}/x],\ [\mathscr{M}/y])$$

y la tesis se sigue de (6.1). Si $<x, y>$ no es elemento de D^2, entonces $<y, x> \in D^2$, y, por tanto, según lo que acabamos de probar, $[\mathcal{M}/y, x] \in \mathcal{Q}$. Ahora bien, por (7.1) resulta que

$$[\mathcal{M}/x, y] = [h(\mathcal{Q}(a)/N(x, a), N(y, a)]$$

y, por tanto,

$$[\mathcal{M}/x, y] = [h([\mathcal{M}/y, x])/2, 1],$$

de donde la tesis se sigue por (7.4).

Lema 7: *Si a es un E-complejo y* $[\mathcal{M}/a_1, a_2] = \mathcal{Q}(a)$, *entonces* $\psi_{\mathcal{M}}(a_1, a_2, \ldots, a_{n+2})$ *es verdad.*

Muestro que $[\mathcal{M}/a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}] = h(\mathcal{Q}(a))$, de donde se sigue la tesis, por (7.2). En la prueba utilizo el lema 5.

α) Para cada a_i $(i = 1, 2, \ldots, \underline{n+2})$, $[\mathcal{M}/a_i] = [h(\mathcal{Q}(a))/i]$.

Prueba: Si $i \geqslant 3$, es decir, $a_i \in B(a)$, entonces a_i se encuentra en el caso A)I y la tesis se sigue de (13) y (18).

Si $i = 1$, basta con fijarse en que, a causa de la hipótesis

$$[\mathcal{M}/a_1 \; a_2] = \mathcal{Q}(a),$$

se da la ecuación $[\mathcal{M}/a_1] = [\mathcal{Q}(a)/1]$, y por (7.1)

$$[\mathcal{Q}(a)/1] = [h(\mathcal{Q}(a))/1]$$

Si $i = 2$, análogamente

$$[\mathcal{M}/a_2] = [\mathcal{Q}(a)/2] = [h(\mathcal{Q}(a))/2]$$

β) Si $\{a_i, a_k\} \subset \bar{a}$ y $<a_i, a_k> \in D^2$, entonces

$$[\mathcal{M}/a_i, a_k] \sim [h(\mathcal{Q}(a))/i, k].$$

Prueba: Si $\{a_i, a_k\} \cap \overline{B(a)} \neq \varnothing$, entonces el par $<a_i, a_k>$ se encuentra en el caso B)I, pues según α)

$$[\mathcal{M}/a_i] = [h(\mathcal{Q}(a))/i], \; [\mathcal{M}/a_k] = [h(\mathcal{Q}(a))/k].$$

Por tanto, según (15) y (18), ocurre que

$$[\mathcal{M}/a_i, a_k] \sim [h(\mathcal{Q}(a))/i, k].$$

Si $\{a_i, a_k\} \cap \overline{B(a)} = \emptyset$, y por tanto $\{a_i, a_k\} = \{a_1, a_2\}$, entonces basta con fijarse en que, por hipótesis,

$$[\mathcal{M}/a_1, a_2] = \mathcal{Q}(a)$$

y, por (7.1), $\mathcal{Q}$(a) $= [h(\mathcal{Q}(a))/1, 2]$, de donde se sigue

$$[\mathcal{M}/a_1, a_2] = [h(\mathcal{Q}(a))/1, 2]$$

y, por tanto, también

$$[\mathcal{M}/a_2, a_1] = [h(\mathcal{Q}(a))/2, 1].$$

γ) Si $\{a_{i_1} \cdots a_{i_k}\} \subset \bar{a}$, $< a_{i_1} \cdots a_{i_k} > \in D^k$ y $k > 2$, entonces

$$[\mathcal{M}/a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}] \sim [h(\mathcal{Q}(a))/i_1 i_2 \cdots i_k],$$

lo que inmediatamente se desprende de C)1 y (18).

La tesis se sigue de α), β), γ) y el lema 5.

De los lemas 6 y 7 se sigue inmediatamente que $\mathcal{M}$ satisface la fórmula (4). Para ello basta con mostrar que para cada dos elementos $x, y \in D$, $x \neq y$, hay elementos $u_1, u_2, \cdots, u_n \in D$, tales que $\psi_{\mathcal{M}}(x, y, u_1, \cdots, u_n)$. Sean, pues, $x, y \in D$, $x \neq y$. Por el lema 6 es $[\mathcal{M}/x, y] \in \mathcal{Q}$. Según una observación hecha anteriormente (pág. 136) hay un E-complejo a, tal que $x = a_1$, $y = a_2$ y $\mathcal{Q}(a) = [\mathcal{M}/x, y]$. Este E-complejo satisface el antecedente del lema 7 y, por tanto, $\psi_{\mathcal{M}}(x, y, a_3, \cdots, a_{n+2})$ es verdad, con lo que el teorema II queda probado.

Llamemos equivalentes a dos fórmulas numéricas si o bien ambas son satisfacibles o bien ambas son insatisfacibles. Para cumplir con el segundo de los puntos anunciados al principio tenemos que mostrar:

Teorema III: *Para cada fórmula numérica podemos encontrar otra fórmula equivalente a ella de la forma*

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_n \alpha(x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 \cdots y_n) \tag{19}$$

donde por lo demás también se puede obtener que en (19) sólo aparezcan variables predicativas binarias.

Llamemos a una fórmula numérica *fórmula normal señalada*, si tiene la forma

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_p \exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_q \alpha(x_1 x_2 \cdots x_p, y_1 y_2 \cdots y_q)$$

Cada fórmula numérica es equivalente a una fórmula normal señalada binaria[8]. Para comprobarlo podemos empezar por construir una fórmula binaria equivalente según el método de Löwenheim[9], luego aplicamos a ésta el procedimiento de Skolem[10] para la producción de una forma normal señalada equivalente, del modo como yo lo he aplicado en el trabajo «La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden» en la prueba del teorema IV ⟦pág. 25 de este libro⟧, con la sola modificación de que en la fórmula β ⟦pág. 25⟧ en vez de $F\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ (esto es una abreviatura para $Fx_1 \ldots x_n y_1 \cdots y_m$) ponemos la siguiente fórmula

$$\exists u(R_1 ux_1 \wedge \ldots \wedge R_n ux_n \wedge R_{n+1} uy_1 \wedge \ldots \wedge R_{n+m} uy_m), \tag{20}$$

donde los R_i son cualesquiera variables de relación que no aparezcan en la fórmula α de la pág. 25; igualmente en vez de $F\mathfrak{x}'\mathfrak{y}'$ escribimos la fórmula correspondiente con los mismos R_i. También la fórmula β así modificada (que es binaria, si la fórmula $\pi_1 \alpha$ de la pág. 25 lo es también), puede convertirse en una forma normal de grado $k-1$ y es equivalente a la fórmula $\pi_1 \alpha$ de la pág. 25. Esto último se desprende inmediatamente del hecho de que cada relación $n+m$-aria F en un dominio infinito

---

[8] Una fórmula numérica se llama binaria si sólo contiene variables de relación binarias.

[9] Véase Löwenheim [1915]: Uber Möglichkeiten im Relativkalkül.

[10] Véase Skolem [1920]: Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematischer Sätzte.

numerable de individuos puede ser representada mediante R_i apropiados en la forma (20).

Por tanto, sólo queda por probar que *para cada fórmula normal señalada binaria* γ *con* n *cuantificadores universales se puede ofrecer otra equivalente* δ *con* $n-1$ *cuantificadores universales, si* $n>3$, de donde se sigue el teorema III por aplicación repetida.

Prueba: Si γ es la fórmula

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m \alpha(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m)$$

designemos entonces con γ' la conyunción de las siguientes tres fórmulas (21), (22) y (23).

$$\forall x_3 \cdots \forall x_n \forall u \exists v \exists w \exists y_1 \cdots \exists y_m (R_1 uv \wedge R_2 uv \wedge \wedge \alpha(u w x_3 \cdots x_n y_1 \cdots y_m)) \tag{21}$$

$$\forall z_1 \forall z_2 \exists u (R_1 u z_1 \wedge R_2 u z_2) \tag{22}$$

$$\forall x \forall y \forall z ((R_1 x y \wedge R_1 x z \rightarrow y = z) \wedge (R_2 x y \wedge R_2 x z \rightarrow y = z)) \tag{23}$$

donde R_1, R_2, son dos variables predicativas que no aparecen en α. Las variables de relación de α sean $S_1, S_2, \dots, S_k$. Si $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k$ es un sistema de relaciones en un dominio infinito numerable D que satisface γ y si $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, son dos relaciones en D, tales que la relación $x\bar{R}_1 y \wedge x\bar{R}_2 z$ proporciona una aplicación biunívoca de los elementos x de D en los pares $<y, z>$ de D, entonces evidentemente $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k$ satisfacen la fórmula γ'. Por tanto, si γ es satisfacible, también lo es γ'. A la inversa, si $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k$, es un sistema que satisface γ', también es $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_k$, un sistema que satisface γ. Pues si $x_1, x_2, \dots, x_n$, son elementos de D, entonces por (22) hay un elemento $u \in D$, tal que $\bar{R}_1 u x_1$, $\bar{R}_2 u x_2$. Además por (21) hay elementos u, w y $y_1, \dots, y_m$, de D, tales que $\bar{R}_1 uv$, $\bar{R}_2 uw$, $\bar{\alpha}(v, w, x_3, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, donde $\bar{\alpha}$ designa la fórmula que se obtiene a partir de α al sustituir los R_i, S_i, por los $\bar{R}_i$, $\bar{S}_i$. Por (23) $v = x_1$ y $w = x_2$. Por tanto, vale $\bar{\alpha}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, con lo cual, y puesto que γ y γ' son fórmulas equivalentes, queda probada la tesis.

La conyunción de dos formas normales señaladas, cada una de las cuales tiene a lo sumo n cuantificadores universales, es equivalente de nuevo a una forma normal señalada con a lo sumo n cuantificadores universales (puesto que $\forall xFx \wedge \forall yGy \leftrightarrow \forall x(Fx \wedge Gx)$). Si aplicamos esto a γ' obtenemos una forma normal señalada con $n-1$ cuantificadores universales, pero que todavía contiene el signo $=$. Si lo eliminamos por el procedimiento desarrollado por L. Kalmar en *Acta Litt. Sci. Szeged*, tomo IV, pág. 248, y por mí en «La suficiencia de los axiomas del cálculo lógico de primer orden», pág. 30, y nos fijamos en la observación anterior sobre la conyunción de formas normales señaladas, obtenemos (puesto que en γ' sólo aparecen variables de relación binarias) de nuevo una forma normal señalada con $n-1$ cuantificadores universales y ésta proporciona la δ en el teorema que queríamos probar.

Para terminar quisiera hacer notar que el teorema I también puede ser probado por el mismo procedimiento para fórmulas que contienen el signo de identidad.

Introducción a:
Sobre sentencias indecidibles de sistemas formales matemáticos

Durante la primavera de 1934, Gödel dio un cursillo en el Instituto de Estudios Avanzados de Pricenton. Por sugerencia de O. Veblen, dos de los oyentes –S. Kleene y J. B. Rosser– confeccionaron unos apuntes de estas conferencias, que fueron multicopiados. La temática cubierta es parecida a la del famoso artículo «Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines», publicado tres años antes. De todos modos, estas conferencias contenían también algunas novedades, la principal de las cuales estriba en la definición de las funciones recursivas, en general. Los apuntes se dividen en nueve partes.

La primera parte introduce ciertas nociones intuitivas sobre sistemas formales. En particular define la completud de un sistema y anuncia el teorema de incompletud.

La segunda parte ofrece la definición precisa de las funciones recursivas primitivas. Una función numérica es recursiva primitiva si y sólo si puede ser obtenida a partir de las funciones constantes, de identificación y del siguiente mediante aplicaciones sucesivas de los esquemas de composición y recursión. En su artículo de 1931, Gödel se había olvidado de mencionar entre las funciones iniciales las funciones de identificación que identifican el miembro i-avo de una secuencia $-U_i^n(x_1 \cdots x_n) = x_i-$ y que son

imprescindibles para la corrección de la definición gödeliana de función recursiva primitiva.

La tercera parte describe el sistema formal que va a servir de base a la prueba del teorema de incompletud y que básicamente consiste en la lógica de tipos suplementada por los axiomas de Peano, como en el sistema presentado en Gödel [1931], del que básicamente sólo difiere en admitir variables para funciones y funcionales monarios de cualquier tipo finito, lo que permite una considerable simplificación de la prueba posterior de que todas las funciones recursivas primitivas son representables en el sistema.

La cuarta parte presenta la gödelización del sistema formal que acaba de describir, es decir, la inyección de los signos, hileras de signos y secuencias de hileras de signos en los números naturales, de tal modo que a cada variable, fórmula, deducción, etc., corresponde biunívocamente cierto número natural, su «número de Gödel», como ahora se dice. Esto permite definir una serie de relaciones numéricas que reflejan otras tantas relaciones metamatemáticas.

La quinta parte contiene la prueba de que cada clase, relación y función recursiva primitiva es representable en el sistema formal elegido (prueba que –como acabamos de indicar– resulta simplificada por la presencia de variables de funciones en el sistema formal) y culmina con la prueba del teorema de incompletud (mediante la construcción de una sentencia indecidible, es decir, tal que ni ella ni su negación es deducible) y del teorema de indemostrabilidad de la consistencia, ya probados en Gödel [1931].

La sexta parte enumera las condiciones que ha de reunir un sistema formal para que esos teoremas le sean aplicables.

La séptima parte contiene unas reflexiones novedosas sobre el concepto de verdad, paralelas a las desarrolladas poco antes por Tarski (pero hasta entonces sólo publicadas en polaco[1] y por tanto desconocidas por Gödel). Al señalar la relación de la sentencia indecidible, que dice de sí misma que no es deducible,

---

[1] El fundamental trabajo de A. Tarski sobre el concepto de verdad en los lenguajes formales fue presentado en 1931 a la Sociedad de Ciencias de Varsovia y publicado en polaco dos años después (véase Tarski [1933]), pero sólo fue realmente dado a conocer con su publicación en alemán [1936].

con la afirmación contradictoria del mentiroso, que dice de sí mismo que miente, y al analizarla más precisamente, resulta que el predicado metamatemático de verdad que se aplica a una sentencia si y sólo si ésta –en la interpretación natural– es verdadera (o, equivalentemente, el correspondiente predicado numérico que se aplica a un número natural si y sólo si éste es el número de Gödel de una sentencia verdadera) no es definible en el sistema formal. Así pues, el concepto de verdad en un sistema formal no es definible en ese sistema, resultado más elaborado por Tarski. Además, puesto que la clase de los números de Gödel de sentencias deducibles (y por tanto también verdaderas) sí es definible en el sistema formal, pero no así la de los números de Gödel de sentencias verdaderas, de ahí se sigue que ha de haber sentencias verdaderas no deducibles. Puesto que sus negaciones (falsas) tampoco pueden ser deducibles, esto implica ya de por sí la existencia de sentencias indecidibles en el sistema (aunque aún no permite construirlas, como sí en cambio había hecho Gödel en la quinta parte mediante su famosa prueba).

La octava parte está dedicada a probar que la sentencia indecible construida en la quinta parte es equivalente a una fórmula prenexa cuyo núcleo es una ecuación diofántica. Nótese que en nuestra traducción –debido a la estandarización de las convenciones notacionales– llamamos función b a la famosa función β de Gödel.

La novena parte presenta un concepto más amplio de función computable que el de función recursiva primitiva introducido en la segunda parte y ya en Gödel [1931]. Aquí introduce el concepto de función recursiva general, precisando y restringiendo una sugerencia de Herbrand. La clase de las funciones recursivas generales de Gödel coincide exactamente –como más adelante se mostró– con las correspondientes a otras propuestas posteriores de dilucidación del concepto de función computable: función λ-definible, función μ-recursiva, función computable por una máquina de Turing, etc. Puesto que todas estas nociones resultan aplicarse a exactamente las mismas funciones, estas funciones han acabado siendo conocidas como funciones recursivas, sin más. Y la llamada tesis de Church –de que las funciones computables en sentido intuitivo son precisamente las funciones recursivas– está hoy universalmente admiti-

da. La definición dada aquí por Gödel de función recursiva general es más complicada y menos sugestiva que otras posteriores actualmente más usadas, pero históricamente es la primera definición precisa de la clase de las funciones recursivas y –si aceptamos las tesis de Church– del concepto de función computable.

Las conferencias de Gödel aparecieron bajo el título *On undecidable propositions of formal mathematical systems* (Sobre sentencias indecidibles de sistemas formales matemáticos) en forma de apuntes tomados por S. Kleene y B. Rosser y publicados en 1934 por el Institute for Advance Study, Princeton, New Jersey. Se encuentran también reimpresos en la antología *The Undecidable*, de Martin Davis [1965]. Con ocasión de esta reimpresión, Gödel indicó en 1964 a M. Davis diversas erratas y descuidos para que fueran corregidos y le envió una serie de notas suplementarias, así como una importante posdata, para que fueran añadidas. En la posdata Gödel propone identificar la noción de sistema formal con la de máquina de Turing (lo que equivale a identificar teoría formalizada con conjunto recursivamente enumerable –es decir, generable por una máquina de Turing– de sentencias), lo que permite formular sus resultados con gran generalidad, y además señala diversos avances posteriores a 1934, en que dio sus conferencias. En esta posdata Gödel tiene buen cuidado de señalar que las limitaciones de la formalización mecánica por él descubiertas no implican necesariamente limitaciones correspondientes de la razón humana. Esta cuestión preocupaba hondamente a Gödel, que posteriormente redactó una nueva nota, en la que critica la idea de que la mente humana sea equivalente a una máquina de Turing y, por tanto, esté sometida a sus limitaciones. Esta nota fue publicada por primera vez en las páginas 325-326 del libro de Hao Wang [1974]: *From Mathematics to Philosophy*.

La traducción aquí presentada recoge tanto el texto corregido de los apuntes impreso en M. Davis [1965], como la posdata escrita por Gödel en 1964 y la nota final (que aquí aparece como nota 38) añadida posteriormente y publicada en H. Wang [1974].

Jesús Mosterín

SOBRE SENTENCIAS INDECIDIBLES DE LOS SISTEMAS FORMALES MATEMATICOS

1. Introducción

Un *sistema formal matemático* es un sistema de signos junto con reglas para utilizarlos. Los signos individuales se llaman signos *primitivos*. *Filas de signos* son secuencias finitas de signos primitivos. Se define una clase de filas de signos llamadas *fórmulas* y una clase de fórmulas llamadas *axiomas*. Puede haber un número finito o infinito de axiomas. Se especifica, además, una serie de reglas llamadas *reglas de inferencia;* si R es una de estas reglas, R define la relación de *inferencia inmediata por R* entre un conjunto de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ llamadas *premisas* y una fórmula dada β, llamada *conclusión* (usualmente con $n=1$ o $n=2$). Exigimos que las reglas de inferencia y las definiciones de las fórmulas y los axiomas sean constructivas; esto es, para cada regla de inferencia debe haber un procedimiento finito para determinar si una fórmula β es inferible inmediatamente (por tal regla) de las fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, y del mismo modo debe existir un procedimiento finito para determinar si una fila de signos ζ dada es una fórmula o un axioma.

Diremos que una fórmula β es *inferible inmediatamente* de las fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ si β es inferible inmediatamente de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ por alguna de las reglas de inferencia. Una secuencia finita de

fórmulas será una *deducción* (específicamente una deducción de la última fórmula de la secuencia) si cada fórmula de la secuencia es un axioma o es inferible inmediatamente de una o más fórmulas precedentes. Una fórmula es *deducible* si existe una deducción de ella. Sea $\sim$ uno de los signos primitivos y supongamos que expresa la negación. El sistema formal será *completo* si para cada fórmula α es deducible α o es deducible $\sim\alpha$. Probaremos más adelante que (bajo las condiciones que serán expuestas) un sistema formal que pueda expresar todos los enunciados de la aritmética como fórmulas no es completo.

2. Relaciones y funciones recursivas primitivas

Ahora haremos unas consideraciones que, por el momento, no tienen nada que ver con un sistema formal.

Las letras latinas minúsculas x, y, z, ..., denotarán números naturales arbitrarios (es decir, enteros no negativos); las letras góticas se usarán como abreviaciones de secuencias finitas de las anteriores, esto es, $\mathfrak{x}$ por $x_1, \dots, x_n$; $\mathfrak{y}$ por $y_1, \dots, y_m$. Las letras f, g, h, ..., representarán funciones con uno o más números naturales como argumentos y con números naturales como valores. Las letras latinas mayúsculas R, S, T, ..., denotarán clases de números naturales o relaciones entre éstos. Rx representa el hecho de que x está en la clase R, y $Sx_1 \dots x_n$ el hecho de que $x_1, \dots, x_n$ están en la relación S. Se pueden considerar las clases como relaciones monádicas y las relaciones como clases de n-nadas ordenadas. A cada clase o relación R le corresponderá una *función característica* f tal que $f(x_1, \dots, x_n)=0$ si $Rx_1 \dots x_n$ y $f(x_1, \dots, x_n)=1$ si $\neg Rx_1 \dots x_n$.

Utilizamos las siguientes notaciones para abreviar (donde X e Y pueden sustituirse por cualquier sentencia): $\forall x(\alpha(x))$ (para cada número natural x, $\alpha(x)$), $\exists x(\alpha(x))$ (existe un número natural x tal que $\alpha(x)$) $\mu x(\alpha(x))$ (el menor número natural x tal que $\alpha(x)$ si $\exists x(\alpha(x))$; 0 en otro caso), $\neg X$ (no X), $X \vee Y$(X o Y), $X \wedge Y$(X e Y), $X \rightarrow Y$ (si X, entonces Y, es decir, $\neg X \vee Y$), $X \leftrightarrow Y$ (X si y sólo si Y, es decir, $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$).

Diremos que la función $f(x_1, \dots, x_n)$ está *compuesta* de $g(x_1,$

$\ldots, x_m)$ y $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ si para todos los números naturales $x_1, \ldots, x_n$:

$$(1) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Se dirá que la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ es *recursiva primitiva* respecto a $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $h(x_1, \ldots, x_{n+1})$ si para todos los números naturales $k, x_2, \ldots, x_n$:

$$(2) \qquad \begin{aligned} f(0, x_2, \ldots, x_n) &= g(x_2, \ldots, x_n) \\ f(k+1, x_2, \ldots, x_n) &= h(k, f(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Tanto en (1) como en (2) está permitida la omisión de cada variable en alguna de (o todas) sus apariciones en el lado derecho (por ejemplo, en (1) está permitido $f(x, y) = g(h_1(x), h_2(x, y)))$[1]. Definimos la clase de las funciones *recursivas primitivas* como la totalidad de las funciones obtenibles mediante sustitución, según el esquema (1), y recursión primitiva, según el esquema (2), a partir de la función del siguiente $x+1$, funciones constantes $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, y funciones proyectivas $U_j^n(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. En otras palabras, una función g será recursiva primitiva si hay una secuencia finita de funciones $g_1, \ldots, g_n$ que termina con g y tal que cada función de la secuencia es la función del siguiente $x+1$, o una función constante $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, o una función proyectiva $U_j^n(x_1, \ldots, x_n) = x_j$, o está compuesta de funciones precedentes, o es obtenida mediante recursión primitiva a partir de funciones precedentes. Una relación R será *recursiva primitiva* si su función característica es recursiva primitiva.

Las funciones recursivas primitivas tienen la importante propiedad de que para cada conjunto dado de argumentos el valor de la función puede computarse mediante un procedimiento finito[2]. Del mismo modo las relaciones (clases) recursivas

[1] Esta frase debería haberse omitido, pues puede efectuarse la eliminación de cualquier aparición de una variable en el lado derecho mediante la función U_j^n.

[2] También parece que lo inverso es verdad si además de la recursión primitiva mediante el esquema (2) se admiten otras formas de recursión (por ejemplo, respecto a dos variables simultáneamente). Esto no puede ser probado, pues no se ha definido la noción de computación finita, pero sirve como principio heurístico[3].

[3] ⟦Nota de 1964⟧. Esta afirmación está anticuada; véase la posdata.

primitivas son decidibles, en el sentido de que para cada n-ada de números naturales puede determinarse mediante un procedimiento finito si la relación vale o no (si el número pertenece o no a la clase), puesto que la función característica es computable.

Las funciones $x+y$, $x \cdot y$, x^y, y $x!$ son claramente recursivas primitivas. Por tanto, $f(\mathfrak{x})+g(\mathfrak{y})$, $f(\mathfrak{x}) \cdot g(\mathfrak{y})$, $f(\mathfrak{x})^{g(\mathfrak{y})}$, y $f(\mathfrak{x})!$ son recursivas primitivas, supuesto que $f(\mathfrak{x})$ y $g(\mathfrak{y})$ lo sean.

I. *Si las relaciones $R\mathfrak{x}$ y $S\mathfrak{y}$ son recursivas primitivas, entonces $\neg R\mathfrak{x}$, $R\mathfrak{x} \vee S\mathfrak{y}$, $R\mathfrak{x} \wedge S\mathfrak{y}$, $R\mathfrak{x} \leftrightarrow S\mathfrak{y}$, $R\mathfrak{x} \rightarrow S\mathfrak{y}$ también son recursivas primitivas.*

Por hipótesis, las funciones características $r(\mathfrak{x})$ y $s(\mathfrak{y})$ de R y S, respectivamente, son recursivas primitivas. Si $ne(0)=1$, $ne(k+1)=0$, entonces $ne(x)$, y por tanto $ne(r(\mathfrak{x}))$ son recursivas primitivas. Pero como $ne(r(\mathfrak{x}))$ es 1 ó 0, según que $r(\mathfrak{x})$ sea 0 ó 1, $ne(r(\mathfrak{x}))$ es la función característica de $\neg R\mathfrak{x}$. Por ello $\neg R\mathfrak{x}$ es recursiva primitiva. Si $di(0, x)=0$ y $di(k+1, x)=ne(ne(x))$, entonces $di(0, x)=di(x, 0)=0$, y $di(x, y)=1$, cuando $x, y>0$. De aquí que $di(r(\mathfrak{x}), s(\mathfrak{y}))$, que es recursiva primitiva, sea la función característica de $R\mathfrak{x} \vee S\mathfrak{y}$; esto es, $R\mathfrak{x} \vee S\mathfrak{y}$ es recursiva primitiva. Como $R\mathfrak{x} \wedge S\mathfrak{y} \leftrightarrow \neg(\neg R\mathfrak{x} \vee \neg S\mathfrak{y})$, se sigue que $R\mathfrak{x} \wedge S\mathfrak{y}$ es recursiva primitiva. Del mismo modo, $R\mathfrak{x} \rightarrow S\mathfrak{y}$, $R\mathfrak{x} \leftrightarrow S\mathfrak{y}$ y todas las otras relaciones definibles a partir de $R\mathfrak{x}$ y $S\mathfrak{y}$ mediante $\neg$ y $\vee$ son recursivas primitivas.

II. *Si las funciones $f(\mathfrak{x})$, $g(\mathfrak{y})$ son recursivas primitivas, entonces las relaciones $f(\mathfrak{x})=g(\mathfrak{y})$, $f(\mathfrak{x})<g(\mathfrak{y})$, $f(\mathfrak{x}) \leqslant g(\mathfrak{y})$ son recursivas primitivas.*

Sea $pre(0)=0$, $pre(k+1)=k$ y $x \dot{-} 0=x$, $x \dot{-} (k+1)=pre(x \dot{-} k)$. Entonces, si $x \geqslant y$, $x \dot{-} y=x-y$, y si $x \leqslant y$, $x \dot{-} y=0$. Por tanto, $ne(y \dot{-} x)$ es la función característica de $x<y$, y $ne(g(\mathfrak{y}) \dot{-} f(\mathfrak{x}))$ la de $f(\mathfrak{x})<g(\mathfrak{y})$. Así que $f(\mathfrak{x})<g(\mathfrak{y})$ es recursiva primitiva. Igualmente, $f(\mathfrak{x})=g(\mathfrak{y})$ y $f(\mathfrak{x}) \leqslant g(\mathfrak{y})$ son recursivas primitivas, como se puede ver directamente o infiriéndolo a partir del teorema para $f(\mathfrak{x})<g(\mathfrak{y})$ mediante el uso de I.

III. *Si la función* $f(\mathfrak{x})$ *y la relación* $Rx\mathfrak{y}$ *son recursivas primitivas, entonces también lo son las relaciones* S, T *tales que*

$$S\mathfrak{x}\mathfrak{y} \leftrightarrow \exists x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \wedge Rx\mathfrak{y})$$

$$T\mathfrak{x}\mathfrak{y} \leftrightarrow \forall x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \rightarrow Rx\mathfrak{y})$$

y la función g *tal que*

$$g(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \mu x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \wedge Rx\mathfrak{y}).$$

Sea $r(x, \mathfrak{y})$ la función característica de $Rx\mathfrak{y}$. Sea $p(0, \mathfrak{y}) = r(0, \mathfrak{y})$ y $p(k+1, \mathfrak{y}) = p(k, \mathfrak{y}) \cdot r(k+1, \mathfrak{y})$. Entonces $p(x, \mathfrak{y}) = r(0, \mathfrak{y}) \cdot r(1, \mathfrak{y}) \cdot \ldots \cdot r(x, \mathfrak{y})$. Por tanto, $p(x, \mathfrak{y})$ será 0 ó 1, según alguno o ninguno de los $r(0, \mathfrak{y})$, $r(1, \mathfrak{y})$, ..., $r(x, \mathfrak{y})$ sea 0; es decir, según exista o no algún número natural $n \leqslant x$ tal que $Rn\mathfrak{y}$. En consecuencia, $p(f(\mathfrak{x}),\mathfrak{y})$, que es recursiva primitiva, es la función característica de $\exists x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \wedge Rx\mathfrak{y})$. Por ello, $\exists x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \wedge Rx\mathfrak{y})$ es una relación recursiva primitiva. Se sigue de esto y de I que $\forall x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \rightarrow Rx\mathfrak{y})$ es recursiva primitiva, pues $\forall x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \rightarrow Rx\mathfrak{y}) \leftrightarrow \neg \exists x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \wedge \neg Rx\mathfrak{y})$. Sea ahora $m(0, \mathfrak{y}) = 0$ y $m(k+1, \mathfrak{y}) = (k+1) \cdot (p(k, \mathfrak{y}) \dot{-} p(k+1, \mathfrak{y})) + m(k,\mathfrak{y}) \cdot (ne(p(k, \bar{\mathfrak{y}}) \dot{-} p(k+1, \mathfrak{y})))$. Como $1 \geqslant p(k, \mathfrak{y}) \geqslant p(k+1, \mathfrak{y}) \geqslant 0$, si $p(k, \mathfrak{y}) = 1$ y $p(k+1, \mathfrak{y}) = 0$, entonces $m(k+1, \mathfrak{y}) = k+1$, y en otro caso, $m(k+1, \mathfrak{y}) = m(k, \mathfrak{y})$. $p(k, \mathfrak{y}) = 1$ y $p(k+1, \mathfrak{y}) = 0$ se dan a la vez sólo cuando $\neg R1\mathfrak{y}$, ..., $\neg Rk\mathfrak{y}$ y $Rk+1\mathfrak{y}$; esto es, cuando $k+1$ es el menor valor x' de x tal que $Rx\mathfrak{y}$. Por tanto, si un tal x' existe y es > 1, entonces $m(0, \mathfrak{y}) = \ldots = m(x'-1, \mathfrak{y}) = 0$ y para todo $x \geqslant x'$ $m(x, \mathfrak{y}) = x'$. Si $x' = 0$ o x' no existe, entonces todos los $m(x, \mathfrak{y})$ son 0. En consecuencia, $m(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{y})$ es el menor $x < f(\mathfrak{x})$ tal que $Rx\mathfrak{y}$ si un tal x existe y 0 en otro caso; es decir, $m(f(\mathfrak{x}),\mathfrak{y}) = \mu x(x \leqslant f(\mathfrak{x}) \wedge Rx\mathfrak{y})$.

3. Un sistema formal

Describimos ahora con cierto detalle un sistema formal que servirá como ejemplo para lo que sigue: Mientras que un sistema formal consta únicamente de signos y reglas mecánicas que los relacionan, el significado que demos a los signos es un principio rector en el establecimiento del sistema.

Como medio para evitar paradojas utilizaremos la teoría de los tipos. Excluimos entonces el uso de variables que tomen valores sobre todos los objetos y usamos diferentes clases de variables en dominios diferentes. En especial X, Y, Z, ..., serán variables de sentencias. Tendremos entonces los siguientes tipos de variables:

x, y, z, ... para números naturales

p, q, ... para funciones (monádicas) cuyos argumentos y valores sean números naturales.

F, G, H, ... para funciones (monádicas) cuyos argumentos y valores sean funciones p, q . ...

y así sucesivamente[4]. Los diferentes sistemas formales quedan determinados por el número de estos tipos de variables que usan. Aquí nos limitaremos a los dos primeros tipos; esto es, usaremos las tres clases de variables X, Y, Z, ...; x, y, z, ...; p, q, ... Supondremos que tenemos entre los signos primitivos un número infinito numerable de cada uno de los tipos (lo que puede asegurarse, por ejemplo, utilizando letras con subíndices numéricos).

Los signos primitivos, además de las variables, serán: 0 (el número 0), S (S(x) denota el siguiente número mayor que x, es decir, el sucesor de x), $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\equiv$, Π ($\Pi x(\alpha(x))$ significa «$\alpha(x)$ es verdad para cualquier número natural x», y puede considerarse como la conyunción de $\alpha(x)$ para todos los x), Σ ($\Sigma x(\alpha(x))$ significa «hay al menos un número natural x tal que $\alpha(x)$ es verdad» y puede considerarse como la disyunción de $\alpha(x)$ para todos los x), μ, = (igualador), (,) (q(x) es el valor de q para el argumento x, siendo los paréntesis (y) interpretados como signos de la operación de *aplicación* de una función a un

[4] No es preciso introducir independientemente funciones *n*-ádicas (para $n > 1$), puesto que las *n*-adas de objetos de cada uno de estos tipos pueden hacerse corresponder biunívocamente con objetos simples del mismo tipo. (Además, las funciones heterogéneas pueden representarse mediante funciones homogéneas.) No son necesarias variables para clases y relaciones, pues podemos usar, en vez de las clases y las relaciones, sus funciones características.

argumento. Los paréntesis también se usan para delimitar, como en $\Pi x(\alpha)$, $(\alpha)\supset(\beta)$, etc.)[5].

A continuación debe definirse la clase de las expresiones. Para esto describimos dos clases de filas de signos que tienen significado –expresiones que denotan números y expresiones que denotan ideas. La primera comprende los *designadores numéricos* o expresiones que representan números (como $0, S(0), \ldots$) y los *términos abiertos* o expresiones que se convierten en designadores numéricos cuando las variables que en ellos aparecen son sustituidas de un modo apropiado por designadores numéricos (como $\mu x(y=S(x))$[6]. La segunda comprende *sentencias* (por ejemplo, $\Pi x(\sim(0=S(x)))$) junto con *fórmulas abiertas* o expresiones que se convierten en sentencias cuando las variables que en ellas aparecen se sustituyen apropiadamente por designadores numéricos (por ejemplo, $\Sigma x(y=S(x))$)[6]. Damos la definición exacta por inducción completa:

1. 0 y $x, y, z, \ldots$ (variables numéricas) son términos y $X, Y, Z, \ldots$ (variables sentenciales) son fórmulas.
2. Si τ_1 y τ_2 son términos, entonces $\tau_1=\tau_2$ es una fórmula.
3. Si τ es un término, entonces $S(\tau)$ es un término.
4. Si τ es un término y q una variable de función, entonces $q(\tau)$ es un término.
5. Si α y β son fórmulas, entonces $\sim(\alpha)$, $(\alpha)\vee(\beta)$, $(\alpha)\wedge(\beta)$, $(\alpha)\supset(\beta)$ y $(\alpha)\equiv(\beta)$ son fórmulas.
6. Si α es una fórmula y x una variable numérica, entonces $\Pi x(\alpha)$ y $\Sigma x(\alpha)$ son fórmulas y $\mu x(\alpha)$ es un término.
7. Si α es una fórmula y q una variable de función, entonces $\Pi q(\alpha)$ y $\Sigma q(\alpha)$ son fórmulas.

---

5 $\sim, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ y μ tienen el mismo significado, respectivamente, que $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ y μ, como se explicó en el apartado 2. $\Pi x(\alpha)$ y $\Sigma x(\alpha)$ significan lo mismo que α cuando x no está en α. El hecho de que las nociones lógicas que aparecen entre nuestros signos primitivos no sean independientes no importa para nuestros propósitos.

6 Como se indica en la página 158, las sustituciones mencionadas en el caso $\mu x(y=S(x))$ y $\Sigma x(y=S(x))$ son sustituciones de y.

8. Si α es una fórmula y X una variable sentencial, entonces $\Pi X(\alpha)$ y $\Sigma X(\alpha)$ son fórmulas.

9. La clase de los términos y fórmulas será la menor clase que satisfaga 1-8.

Una fila de signos será una *expresión* si es un término o una fórmula.

Las apariciones[7] de las variables en una expresión se clasifican en libres y ligadas del siguiente modo: a cada aparición de Π en una expresión ζ le corresponde una única parte de ζ que empieza con la aparición de Π y es de la forma $\Pi t\ (\eta)$, siendo t una variable y η una expresión. Esta parte de ζ se llamará el *alcance* de esa aparición de Π en ζ. Similarmente se define el alcance de una aparición de Σ o μ en ζ. Una aparición dada de la variable t en ζ estará ligada o libre, según se encuentre o no en el alcance de algún Π, Σ o μ seguido de t.

En las anteriores definiciones de términos abiertos y fórmulas abiertas, las sustituciones que se indican son las sustituciones de las apariciones libres de las variables (y está libre y x ligada en $\mu x(y=S(x))$ y en $\Sigma\ x(y=S(x)))$.

Utilizamos $\Sigma_t^\eta(\zeta)$ para denotar la expresión obtenida a partir de ζ, sustituyendo cada aparición libre de t en ζ por η[8].

Podemos usar $\zeta(t)$ para representar una expresión en la que t aparezca como una variable libre[9], y $\zeta(\eta)$ para referirnos a $\Sigma_t^\eta(\zeta(t))$.

Si ζ es una expresión y q una variable de función, entonces cada aparición libre de q en ζ es como el primer signo de una de las partes de ζ de la forma $q(\tau)$. Podemos ordenar estas partes $q(\tau_1), \cdots, q(\tau_n)$, de forma que si τ_j contiene a $q(\tau_i)$, entonces $i<j$. Sea $\eta(x)$ una expresión en la que aparezca x como variable libre. Sea $\zeta', q(\tau'_2), \cdots, q(\tau'_n)$ el resultado de sustituir $q(\tau_1)$ por $\eta(\tau_1)$[10] en

[7] Una aparición de un signo (o fila de signos) κ en una expresión ζ es una parte concreta de ζ de la forma κ.

[8] «Σ» no es, claro está, un signo de nuestro sistema formal, sino más bien un signo metamatemático.

[9] Entonces ζ no representa por sí misma una expresión.

[10] Más explícitamente, sea ζ' la expresión obtenida a partir de ζ al sustituir $q(\tau_1)$ por $\eta(\tau_1)$, y sean $q(\tau'_2), \cdots, q(\tau'_n)$ las partes de ζ' en que han sido transformadas por sustitución las partes $q(\tau_2), \cdots, q(\tau_n)$ de ζ.

$\zeta, \mathsf{q}(\tau_2), \ldots, \mathsf{q}(\tau_n)$; sea ahora $\zeta'', \mathsf{q}(\tau_3''), \ldots, \mathsf{q}(\tau_n'')$ el resultado de sustituir $\mathsf{q}(\tau_2')$ por $\eta(\tau_2')$ en $\zeta', \mathsf{q}(\tau_3'), \ldots, \mathsf{q}(\tau_n')$, etc. Denotaremos la expresión $\zeta^{(n)}$ mediante $\mathrm{S}_{\mathsf{q}}^{\eta(\mathsf{x}),\mathsf{x}}(\zeta)$[11].

Una fórmula α en la que aparezcan las distintas variables libres $\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n$ significará lo mismo que $\Pi\mathsf{t}_1(\ldots(\Pi\mathsf{t}_n(\alpha))\ldots)$.

Los axiomas serán las siguientes fórmulas (A1-C2)[12]:

A. Axiomas relativos a las nociones del cálculo conectivo

1. $(\mathsf{X} \supset \mathsf{Y}) \supset ((\mathsf{Y} \supset \mathsf{Z}) \supset (\mathsf{X} \supset \mathsf{Z}))$
2. $((\sim \mathsf{X}) \supset \mathsf{X}) \supset \mathsf{X}$
3. $\mathsf{X} \supset ((\sim \mathsf{X}) \supset \mathsf{Y})$
4. $\mathsf{X} \wedge \mathsf{Y} \equiv \sim((\sim \mathsf{X}) \vee (\sim \mathsf{Y}))$
5. $\mathsf{X} \vee \mathsf{Y} \equiv ((\sim \mathsf{X}) \supset \mathsf{Y})$
6. $(\mathsf{X} \equiv \mathsf{Y}) \equiv (\mathsf{X} \supset \mathsf{Y}) \wedge (\mathsf{Y} \supset \mathsf{X})$
7. $(\mathsf{X} \equiv \mathsf{Y}) \supset (\mathsf{X} \supset \mathsf{Y})$
8. $(\mathsf{X} \equiv \mathsf{Y}) \supset (\mathsf{Y} \supset \mathsf{X})$

Proporcionar la teoría de este grupo de axiomas requeriría un estudio de la teoría del cálculo conectivo.

B. Axiomas relativos a la noción de identidad:

1. $\mathsf{x} = \mathsf{x}$
2. $\mathsf{x} = \mathsf{y} \supset \mathsf{q}(\mathsf{x}) = \mathsf{q}(\mathsf{y})$
3. $\mathsf{x} = \mathsf{y} \wedge \mathsf{y} = \mathsf{z} \supset \mathsf{z} = \mathsf{x}$

[11] Describimos aquí el método propio de sustituir una variable de función q por una expresión $\eta(\mathsf{x})$ en una expresión ζ, y denotamos el resultado de la sustitución mediante $\mathrm{S}_{q}^{\eta(x),x}(\zeta)$. Si $\eta(\mathsf{x})$ no contiene a q (situación a la que siempre se puede llegar en una deducción mediante un cambio de notación), entonces *también se puede definir* $\mathrm{S}_{q}^{\eta(x),x}(\zeta)$ *del siguiente modo: reemplácese* $\mathsf{q}(\tau)$ *por* $\eta(\tau)$ *en* una de las apariciones libres de q en ζ, hágase lo mismo con la expresión resultante, etc., hasta que se obtenga una expresión en la que q no aparezca como variable libre. (x debe ser explícitamente destacada como la variable libre de $\eta(\mathsf{x})$ que se va a usar en el proceso de sustitución, porque $\eta(\mathsf{x})$ puede contener otras variables libres.)

[12] Al escribir estos axiomas y otras fórmulas empleamos las convenciones usuales concernientes a la omisión de paréntesis. Cualquier abreviación de una fórmula debe considerarse como algo ajeno al sistema formal; las afirmaciones que versan sobre las fórmulas del sistema se refieren a su forma no abreviada.

C. Axiomas que corresponden a algunos de los axiomas de Peano para los números naturales:

1. $\sim(0=\mathsf{S}(\mathsf{x}))$
2. $\mathsf{S}(\mathsf{x})=\mathsf{S}(\mathsf{y})\supset \mathsf{x}=\mathsf{y}$

Para completar la definición del sistema formal considerado, todavía tenemos que dar la lista de las reglas de inferencia. Debe interpretarse cada regla como una especificación de las condiciones bajo las que una fila de signos ζ es inferible inmediatamente por tal regla de la fórmula α (o de las fórmulas α, β)[13].

1. Si $(\alpha)\supset(\beta)$ y α, entonces β.

2. Si α es una fórmula, t una variable y t no está en α, entonces

   a. Si $(\alpha)\supset(\beta)$, entonces $(\alpha)\supset(\Pi \mathrm{t}(\beta))$
   b. Si $(\alpha)\supset(\Pi \mathrm{t}(\beta))$, entonces $(\alpha)\supset(\beta)$

3. Si α es una fórmula, t una variable y t no aparece en β, entonces[14]

   a. Si $(\alpha)\supset(\beta)$, entonces $(\Sigma \mathrm{t}(\alpha))\supset(\beta)$
   b. Si $(\Sigma \mathrm{t}(\alpha))\supset(\beta)$, entonces $(\alpha)\supset(\beta)$

4a. Si x es una variable numérica, x está libre en α, τ es un término y ninguna variable libre de τ está ligada en α, entonces

$$\text{si } \alpha, \text{ entonces } \mathsf{S}_{\mathrm{x}}^{\tau}(\alpha)$$

[13] ζ será también una fórmula siempre que se cumplan las condiciones indicadas en cada regla. La Regla 1, por ejemplo, podría escribirse más explícitamente así: α será *inferible inmediatamente por la Regla* 1 de β y γ si, y sólo si, β y γ son fórmulas y existen filas de signos ζ y η tales que β es $(\zeta)\supset(\eta)$, γ es ζ y α es η.

[14] Esta condición asegura que siempre que $(\alpha)\supset(\beta)$ es una fórmula, la aparición de $\supset$ que separa (α) de (β) es la última aparición de $\supset$ introducida en la construcción de $(\alpha)\supset(\beta)$, según la definición de fórmula. (Podemos decir entonces que la *operación principal* de $(\alpha)\supset(\beta)$ es un condicional cuyo primer y segundo *miembros* son α y β, respectivamente.) Esto excluye posibilidades tales como que sea $(\mathsf{X}\supset\mathsf{Y})\supset((\mathsf{Y}\supset\mathsf{Z}$, siendo $(\alpha)\supset(\beta)$ el axioma Al.

4b. Si q es una variable de función, q está libre en α, x es una variable numérica, $\tau(x)$ es un término en el que x está libre, ninguna variable libre de $\tau(x)$ o de α está ligada en $\tau(x)$ o en α, y $\tau(x)$ y α no tienen variables ligadas en común, entonces

$$\text{si } \alpha, \text{ entonces } \mathsf{S}_{q}^{\tau(x),\, x}(\alpha)$$

4c. Si X es una variable sentencial, X está libre en α, β es una fórmula y ninguna variable libre de β está ligada en α, entonces

$$\text{si } \alpha, \text{ entonces } \mathsf{S}_{x}^{\beta}(\alpha)$$

4d. Si x es una variable numérica, $\alpha(x)$ es una fórmula que contiene a x como variable libre y ninguna variable libre de α aparece como variable ligada en α, entonces

$$\text{si } (\beta) \supset (\alpha(x)), \text{ entonces } (\beta) \supset (\alpha(\mu x(\alpha(x))))$$ [15]

---

[15] Si $\alpha(x)$ es una fórmula que contiene a la variable numérica x libre, entonces, con la ayuda de esta regla, $\Sigma\, x(\alpha(x)) \supset \alpha(\mu x(\alpha(x)))$ es deducible en nuestro sistema formal. La Regla 4c nos permite inferir $(X \supset ((\sim X) \supset X)) \supset ((((\sim X) \supset X) \supset X) \supset (X \supset X))$ a partir del axioma Al (esto es, sustituyendo Y por $(\sim X) \supset X$ y Z por X) y también $X \supset ((\sim X) \supset X)$ a partir del axioma A3 (sustituyendo Y por X). Entonces la Regla 1 nos permite inferir de estos dos resultados $(((\sim X) \supset X) \supset X) \supset (X \supset X)$, y entonces, a partir de esto y del axioma A2, inferir $X \supset X$. Por consiguiente, podemos inferir sucesivamente $\alpha(x) \supset \alpha(x)$ por la Regla 4c (sustituyendo X por $\alpha(x)$), $\alpha(x) \supset \alpha(\mu x(\alpha(x)))$ por la Regla 4d, $\alpha(x) \supset \alpha(\mu y(\alpha(y)))$ mediante una o más aplicaciones de la Regla 6, $\Sigma\, x(\alpha(x)) \supset \alpha(\mu y(\alpha(y)))$ por la Regla 3a, y $\Sigma\, x(\alpha(x)) \supset \alpha(\mu x(\alpha(x)))$ por la Regla 6. De este modo se deduce en nuestro sistema formal esta última fórmula que expresa la propiedad esencial de μ. Si el sistema admitiese el uso de μ con variables de funciones (es decir, si se añadiese una regla de inferencia 4d′ obtenida a partir de 4d reemplazando «x» por «q» y «numérica» por «de función»), entonces para cualquier fórmula $\beta(q)$ que contenga a la variable de función q libre sería deducible $\Sigma q(\beta(q)) \supset \beta(\mu q(\beta(q)))$. Esta última fórmula expresa el axioma de elección para clases de funciones de números naturales.

Obsérvese que mediante nuestra regla formal para μ no podemos probar que $\mu x(\alpha(x))$ es el *menor* número natural x tal que $\alpha(x)$ ni que $\mu x(\alpha(x)) = 0$ si no existe un tal número natural, sino que únicamente podemos probar que si hay números naturales x tales que $\alpha(x)$, entonces $\mu x(\alpha(x))$ es uno de ellos (es decir, $\Sigma\, x(\alpha(x)) \supset \alpha(\mu x(\alpha(x)))$). Esto, sin embargo, bastará para todas las aplicaciones.

5. Si x es una variable numérica y $\alpha(x)$ es una fórmula en la que x está libre, entonces

$$\text{si } \alpha(0) \text{ y } \alpha(x) \supset \alpha(S(x)), \text{ entonces } \alpha(x)$$

6. Si t_1 y t_2 son variables del mismo tipo, t_1 no está libre en α, t_2 no aparece en α, α' es el resultado de sustituir t_1 por t_2 en α, α es una fórmula y β' denota la fórmula obtenida a partir de β al sustituir una aparición de α en β por α', entonces

$$\text{si } \beta, \text{ entonces } \beta'$$[16].

Hay un proceso usado en las pruebas matemáticas que no está representado en este sistema; a saber, la definición e introducción de nuevos signos. Sin embargo, este proceso no es esencial, sino cuestión de mera abreviación.

4. Una representación del sistema formal mediante un sistema de números naturales

Para las consideraciones que vienen a continuación carece de importancia cuál sea el significado de los signos e incluso sería deseable que fuese olvidado. Las nociones relativas al sistema considerado de un modo puramente formal pueden llamarse *metamatemáticas.*

Los signos primitivos (y por tanto las filas de signos y las deducciones) son numerables, y por ello se puede construir una representación del sistema formal mediante un sistema de números naturales, como haremos a continuación:

A los signos del sistema formal les asignamos los números 1-13 del siguiente modo:

0	S	=	~	V	Λ	⊃	≡	Π	Σ	μ	(	)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

[16] Obsérvese que β podría ser α misma (y entonces β' sería α').

a las variables sentenciales los números naturales >13 y $\equiv 0$ (mod 3), a las variables numéricas los números naturales >13 y $\equiv 1$ (mod 3) y a las variables de funciones los números naturales >13 y $\equiv 2$ (mod 3). Se establece de este modo una correspondencia biunívoca entre los signos primitivos y los enteros positivos.

Asignamos números naturales a las secuencias finitas de números naturales por medio del esquema:

$$\text{a } k_1, \ldots, k_n \text{ le corresponde } 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3} \cdot \ldots, p_n^{k_n},$$

donde p_i es el i-avo número primo (en orden de magnitud creciente). Una fila de signos es una secuencia finita de signos primitivos y una deducción una secuencia finita de filas de signos. Asignamos a cada fila de signos el número natural que corresponde a la secuencia de números naturales que se asignan a sus signos; y asignamos a cada deducción el número natural que corresponde a la secuencia de números naturales asignados a sus filas de signos. Se determina entonces una correspondencia biunívoca entre las filas de signos (deducciones) y un subconjunto de los números naturales.

Podemos definir ahora una serie de clases y relaciones metamatemáticas entre números naturales incluyendo una correspondiente para cada clase de filas de signos y cada relación entre filas de signos. x será un f-número (B-número) si hay una fila de signos (secuencia de filas de signos) a la que x corresponda[17]. La relación $xyUz$ entre números significará que x, y, z son f-números y la fórmula que z representa es inferible inmediatamente de las fórmulas que x, y representan. xBy significará que x es un B-número, y un f-número y la secuencia de filas de signos que x representa constituye una deducción de la fórmula representada por y. Tenemos también funciones metamatemáticas de números naturales, como las siguientes: $Neg(x) =$ el número que representa a $\sim(\zeta)$ en el caso de que x representa ζ; y $=0$ si x no es un f-número. $Sb(x_y^z) =$ el número que represente a $\text{S}_t^\eta(\zeta)$, la sustitución de las apariciones libre de t en ζ por η, si

[17] *B* está por «Beweis». Luego aparece *U* por «unmittelbar Folge», *Gl* por «Glied» y *E* por «einklammern».

x, z representan las filas de signos ζ, η e y la variable **t**; en otro caso $=0$. Estas funciones y relaciones que hemos definido indirectamente, haciendo uso de la correspondencia entre números y filas de signos, son constructivas. No es, por tanto, sorprendente que sean recursivas primitivas. Probaremos esto para algunas de las más importantes definiéndolas directamente a partir de las funciones y relaciones que ya sabemos que son recursivas primitivas mediante los métodos, expuestos en el apartado 2, para generar funciones y relaciones recursivas primitivas a partir de funciones y relaciones recursivas primitivas[18].

1. $x/y \leftrightarrow \exists z(z \leqslant x \wedge x = y \cdot z)$

«x/y» significa «x es divisible por y». ($y \cdot z$ es recursiva primitiva. Entonces, por II del apartado 2, $x = y \cdot z$ es recursiva primitiva. Se sigue entonces por III que x/y es recursiva primitiva. Se ha introducido $z \leqslant x$ en la definición para hacer patente que se aplica III, pero podría haberse omitido sin cambios en el significado).

2. $Prim\ x \leftrightarrow x > 1 \wedge \neg \exists z(z \leqslant x \wedge \neg(z = 1) \wedge \neg(z = x) \wedge x/z)$

«x es un número primo».

3. $Pr(0) = 0$

$Pr(n+1) = \mu y(y \leqslant (Pr(n))! + 1 \wedge Prim\ y \wedge y > Pr(n))$

$Pr(n)$ es el n-avo número primo (en orden de magnitud).

4. $n\ Gl\ x = \mu y(y \leqslant x \wedge x/(Pr(n))^y \wedge \neg(x/(Pr(n))^{y+1}))$.

$n\ Gl\ x$ es el n-avo número de la secuencia de números naturales que x representa (es decir, si $x = 2^{k_1}, 3^{k_2}, \ldots, p_n^{k_n}, \ldots, p_l^{k_l}$, entonces $n\ Gl\ x$ es k_n).

5. $L(x) = \mu y(y \leqslant x \wedge (y+1)\ Gl\ x = 0)$.

$L(x)$ es el número de miembros de la secuencia representada por x (si x representa una secuencia de números naturales).

---

[18] Usamos las notaciones formales (incluyendo las explicadas en el apartado 2) en las siguientes definiciones con el propósito de abreviar la discusión. Estas notaciones formales no deben confundirse con las filas de signos de nuestro sistema formal matemático en consideración.

6. $x * y = \mu z(z \leqslant (Pr(L(x) + L(y)))^{x+y} \wedge \forall n(n \leqslant L(x) \rightarrow n\ Gl\ z = n\ Gl\ x) \wedge \forall n(0 < n \leqslant L(y) \rightarrow (n + L(x))\ Gl\ z = n\ Gl\ y))$.

$*$ representa la operación de concatenar una secuencia finita con otra (es decir, si $x = 2^{k1}, \dots, p_r^{kr}$, $y = 2^{i1}, \dots, p_s^{is}$, entonces $x * y = 2^{k1}, \dots, p_r^{kr}, p_{r+1}^{i1}, \dots, p_{r+s}^{is}$).

Obsérvese que el número de la secuencia que consiste en el simple número x es 2^x.

7. $E(x) = 2^{12} * x * 2^{13}$.

Si x representa la fila de signos ζ, entonces $E(x)$ representa (ζ) (pues entonces la secuencia de números asignado a los signos de (ζ) es: 12, $k_1, \dots, k_n$, 13, donde $k_1, \dots, k_n$ es la secuencia de números asignados a los signos de ζ).

8. $Neg(x) = 2^4 * E(x)$.

Si x representa la fila de signos ζ, entonces $Neg(x)$ representa $\sim(\zeta)$.

9. $Imp(x, y) = E(x) * 2^7 * E(y)$.

Si x, y representan las filas de signos ζ, η, respectivamente, entonces $Imp(x, y)$ representa $(\zeta) \supset (\eta)$.

10. $u\ Gen\ x = 2^9 * 2^u * E(x)$.

Si u representa la variable t y x la fila de signos ζ, entonces $u\ Gen\ x$ representa $\Pi\mathrm{t}(\zeta)$.

Similarmente para $\Sigma\mathrm{t}(\zeta)$ y $\mu\mathrm{t}(\zeta)$.

11. $x \equiv y\ (mod\ n) \leftrightarrow \exists z(z \leqslant x + y \wedge (x = y + z \cdot n \vee y = x + z \cdot n))$

$x \equiv y\ (mod\ n)$ tiene el significado usual.

$t > 13$ expresa «t representa una variable». También, usando 11, pueden definirse las clases recursivas primitivas $Var_s t$, $Var_x t$ y $Var_f t$, que expresan, respectivamente, «t representa una variable sentencial», «t representa una variable numérica» y «t representa una variable de función».

Pueden definirse las clases recursivas primitivas *Term x*, *Form x*, *Exp x*, que expresan, respectivamente, «x representa un término», «x representa una fórmula» y «x representa una expresión», relaciones recursivas primitivas correspondientes a las relaciones «t aparece en ζ como variable libre (ligada)» y

funciones recursivas primitivas correspondientes a las operaciones de sustitución usadas en las reglas de inferencia[19].

12. $xyU_1\ z \leftrightarrow x = \mathrm{Imp}(y, z) \wedge Exp\ x \wedge Exp\ y$.
«z representa una fórmula que es inferible inmediatamente por la Regla 1 de las fórmulas representadas por x e y».

13. $xU_2\ z \leftrightarrow \exists uvw(u, v, w \leqslant z \wedge Exp\ v \wedge Exp\ w \wedge x = Imp(v, w) \wedge z = Imp(v, (u\ Gen\ w)) \wedge u > 13 \wedge \neg \exists k(k \leqslant L(v) \wedge k\ Gl\ v = u))$[20].
«z representa una fórmula que es inferible inmediatamente por la Regla 2 de la fórmula representada por x».
Similarmente para las demás reglas de inferencia.

14. $xyU\ z \leftrightarrow xyU_1\ z \vee xU_2 z \vee \ldots \vee\ xU_6\ z$.
«z representa una fórmula que es inferible inmediatamente de la fórmula representada por x (o de las fórmulas representadas por x e y)».
Cada axioma está representado por un número. Sean $a_1, \ldots, a_{13}$ los números correspondientes a los axiomas.

15. $Ax\ x \leftrightarrow x = a_1 \vee x = a_2 \vee \ldots \vee x = a_{13}$.
«x representa un axioma».

16. $Bw\ x \leftrightarrow \forall n(0 < n \leqslant L(x) \rightarrow (Ax\ (n\ Gl\ x) \vee \exists ki(0 < i, k < n \wedge (i\ Gl\ x)\ (k\ Gl\ x)U\ (n\ Gl\ x)))) \wedge L(x) > 0$.
«x representa una deducción».

17. $x\ B\ y \leftrightarrow Bw\ x \wedge L(x)\ Gl\ x = y$.
«x representa una deducción, y una fórmula, y la deducción representada por x es una deducción de la fórmula representada por y».
La afirmación de que el sistema está libre de contradicciones puede escribirse como una sentencia aritmética del siguiente modo:

$$\forall xyz(\neg(x\ B\ z \wedge y\ B\ Neg(z)))$$

[19] Para los detalles de la definición de las clases, relaciones y funciones de este tipo, relativas a un sistema similar al que aquí consideramos, véase Gödel [1931]. Véanse específicamente las definiciones 1-31 en las páginas 182-184 ⟦en este libro, págs. 67-71⟧.

[20] $\exists uvw(u, v, w \leqslant z \wedge \ldots)$ representa $\exists u(\exists v(\exists w(u \leqslant z \wedge v \leqslant z \wedge w \leqslant z \wedge \ldots)$. Similarmente, $\forall xyz(\alpha)$ representa $\forall x(\forall y(\forall z(\alpha)))$.

(es decir, para cualesquiera números naturales x, y, z no es el caso que x represente una deducción de la fórmula α e y de $\sim(\alpha)$, donde z representa a α).

5. Representación de funciones recursivas primitivas mediante expresiones de nuestro sistema formal

Abreviamos ciertas expresiones formales del siguiente modo: z_0 en vez de 0, z_1 en vez de S(0), z_2 en vez de S(S(0)), etc. Entonces las z_i *representan* los números naturales en la lógica formal. De nuevo, si $f(x_1, x_2, \ldots)$ es una función de números naturales, diremos que el término abierto $\tau(u_1, u_2, \ldots)$ *representa* $f(x_1, x_2, \ldots)$ si para cada conjunto de números naturales $m, n, \ldots,$ es deducible $\tau(z_m, z_n, \ldots) = z_{f(m, n, \ldots)}$; en otras palabras, si $\tau(z_m, z_n, \ldots) = z_k$ es deducible siempre que $f(m, n, \ldots) = k$. Si el valor de $f(x_1, x_2, \ldots)$ es independiente de alguna variable x_i, entonces $\tau(u_1, u_2, \ldots)$ no precisa contener la correspondiente variable z_i. Del mismo modo, si $Rx_1x_2 \ldots$ es una clase de, o relación entre, números naturales, diremos que la fórmula abierta $\alpha(u_1, u_2, \ldots)$ *representa* $Rx_1x_2\ldots$ si podemos deducir $\alpha(z_m, z_n, \ldots)$ siempre que ocurre $Rmn\ldots$ y podemos deducir $\sim(\alpha(z_m, z_n, \ldots))$ siempre que no ocurra $Rmn\ldots$.

Esbozamos ahora una prueba de que cada función, clase y relación recursiva primitiva está representada por alguna expresión de nuestro sistema formal.

La función recursiva $x+1$ está representada por S(w) porque se puede deducir para cada número natural n que $S(z_n) = z_{n+1}$. La prueba es inmediata, pues, según nuestras abreviaciones, z_{n+1} *es* $S(z_n)$. La función constante $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ está representada por z_c, y la función proyectiva $U_j^n(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ está representada por u_j.

Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ está compuesta de $g(x_1, \ldots, x_m)$ y $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, y si $\sigma(w_1, \ldots, w_m)$ representa $g(x_1, \ldots, x_m)$ y $\tau_i(w_1, \ldots, w_n)$ representa $h_i(x_1, \ldots, x_n)$, entonces $\sigma(\tau_1(w_1, \ldots, w_n), \ldots, \tau_m(w_1, \ldots, w_n))$ representa $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es recursiva primitiva respecto a $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $h(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $\sigma(w_1, \ldots, w_{n-1})$ representa $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $\tau(w_1, \ldots, w_{n+1})$ representa $h(x_1, \ldots, x_{n+1})$, entonces $\mu z(\Sigma q(q(0) = \sigma(w_2,$

..., $w_n) \wedge \Pi u(q(S(u)) = \tau(u, q(u), w_2, ..., w_n)) \wedge q(w_1) = z))$ representa $f(x_1, ..., x_n)$. Esta expresión, llamémosla $\kappa(w_1, ..., w_n)$, tiene intuitivamente el significado deseado. Para cada conjunto de números naturales $w_1, ..., w_n$ hay una única función q que satisface las condiciones $q(0) = \sigma(w_2, ..., w_n)$, $q(k+1) = \tau(k, q(k), w_2, ..., w_n)$, y por tanto $\kappa(w_1, ..., w_n)$ significa «el valor que la función q, que satisface las anteriores condiciones, toma para el argumento w_1». Este valor es, obviamente, $f(w_1, ..., w_n)$. La prueba de que $\kappa(w_1, ..., w_n)$ representa realmente $f(x_1, ..., x_n)$ si σ representa g y τ representa h es demasiado larga para darla aquí[21].

Si $Rxy...$ es una clase o relación recursiva primitiva, hay una función recursiva primitiva $f(x, y, ...)$ tal que $f(x, y, ...) = 0$ si $Rxy...$ y $f(x, y, ...) = 1$ si $\neg Rxy...$. Hay, por tanto, un $\tau(u, v, ...)$ que representa $f(x, y, ...)$. $\tau(u, v, ...) = 0$ representa $Rxy...$, pues si $Rmn...$, entonces es deducible $\tau(z_m, z_n, ...) = z_0 = 0$, y si $\neg Rmn...$, entonces es deducible $\tau(z_m, z_n, ...) = z_1$, y por tanto $\sim (\tau(z_m, z_n, ...) = 0)$.

Como ciertas relaciones y sentencias metamatemáticas sobre el sistema formal pueden expresarse como enunciados y relaciones recursivas primitivas sobre él, estas sentencias y relaciones pueden expresarse en el sistema formal. De este modo, partes de la teoría cuyo objeto es nuestro sistema formal pueden expresarse en el mismo sistema formal. Esto conduce a interesantes resultados.

Hemos visto que $x\ B\ y$ es una relación recursiva primitiva; y podemos también probar que $d(x, y)$ es recursiva primitiva, donde $d(x, y)$ es el número de la fórmula que resulta de reemplazar todas las apariciones libres de w en la fórmula[21a] de número x por z_y. (De hecho, si a es el número de w y $f(n)$ el número de z_n, entonces $d(x, y)$ es $Sb(x_a^{f(y)})$). Hay, por tanto, una

---

[21] Obsérvese que no se precisa esta prueba para la demostración de la existencia de sentencias matemáticas indecidibles en el sistema considerado. La razón es que si alguna función recursiva primitiva no estuviese «representada» por la correspondiente expresión construida en las páginas 167-168, esto implicaría trivialmente la existencia de sentencias indecidibles, a menos que fuese demostrable alguna sentencia falsa sobre números naturales.

[21a] ⟦Aquí se consideran las fórmulas que tienen una sola variable libre, siempre la misma, a saber, w.⟧

fórmula $\beta(\mathsf{u}, \mathsf{v})$ que representa $x\ B\ y$ y un término $\delta(\mathsf{u}, \mathsf{v})$ que representa $d(x, y)$.

Sea $\varphi(\mathsf{w})$ la fórmula $\Pi\mathsf{v}(\sim(\beta(\mathsf{v}, \delta(\mathsf{w}, \mathsf{w}))))$ y sea p el número de $\varphi(\mathsf{w})$. Ahora bien, $\varphi(\mathsf{z}_p)$ es la fórmula que resulta de reemplazar todas las apariciones libres de w en la fórmula de número p por z_p y tiene en consecuencia el número $d(p, p)$. Por tanto, si $\varphi(\mathsf{z}_p)$ es deducible, entonces hay un k tal que $k\ B\ d(p, p)$. Pero como $\delta(\mathsf{u}, \mathsf{v})$ representa $d(x, y)$ y $\beta(\mathsf{u}, \mathsf{v})$ representa $x\ B\ y$, se sigue entonces que $\beta(\mathsf{z}_k, \delta(\mathsf{z}_p, \mathsf{z}_p))$ es deducible. También es una propiedad de nuestro sistema formal que siempre que $\Pi\mathsf{v}(\alpha(\mathsf{v}))$ es deducible, entonces para cada n es deducible $\alpha(\mathsf{z}_n)$; en consecuencia, si $\varphi(\mathsf{z}_p)$ es deducible, entonces tanto $\sim(\beta(\mathsf{z}_k, \delta(\mathsf{z}_p, \mathsf{z}_p)))$ como $\beta(\mathsf{z}_k, \delta(\mathsf{z}_p, \mathsf{z}_p))$ son deducibles y el sistema contiene por tanto una contradicción. Concluimos entonces que $\varphi(\mathsf{z}_p)$ no es deducible, a menos que el sistema sea contradictorio[22].

Nos planteamos ahora la pregunta de si $\sim(\varphi(\mathsf{z}_p))$ es deducible si el sistema no es contradictorio. Si el sistema no es contradictorio, entonces $\varphi(\mathsf{z}_p)$ no es deducible, como ya se ha visto. Como $\varphi(\mathsf{z}_p)$ es la fórmula de número $d(p, p)$, tenemos que para todo $k \neg k\ B\ d(p, p)$, y por tanto para todo k es deducible $\sim(\beta(\mathsf{z}_k, \delta(\mathsf{z}_p, \mathsf{z}_p)))$. Si $\sim(\varphi(\mathsf{z}_p))$, es decir, $\sim(\Pi\mathsf{v}(\sim(\beta(\mathsf{v}, \delta(\mathsf{z}_p, \mathsf{z}_p)))))$, fuese deducible, tendríamos que sería deducible una fórmula que afirma que no es el caso de que para todo $k \sim(\beta(\mathsf{z}_k, \delta(\mathsf{z}_p, \mathsf{z}_p)))$, y esto, junto con el hecho de que para todo k es deducible $\sim(\beta(\mathsf{z}_k, \delta(\mathsf{z}_p, \mathsf{z}_p)))$, hace que el sistema sea intuitivamente contradictorio. En otras palabras, si consideramos que el sistema es contradictorio no meramente cuando hay una α tal que tanto α como $\sim(\alpha)$ son deducibles, sino también cuando hay una α tal que todas las fórmulas $\sim\Pi\mathsf{v}(\alpha(\mathsf{v}))$, $\alpha(\mathsf{z}_0)$, $\alpha(\mathsf{z}_1)$..., son deducibles, entonces si $\sim(\varphi(\mathsf{z}_p))$ es deducible, el sistema es contradictorio en este sentido débil. Por tanto, ni $\varphi(\mathsf{z}_p)$ ni $\sim(\varphi(\mathsf{z}_p))$ son deducibles, a menos que el sistema sea contradictorio.

Si nuestro sistema está libre de contradicciones en el sentido

[22] Esta versión del argumento sigue las líneas de uno usado por Herbrand en una exposición informal en Herbrand [1931]. Es un poco más breve que mi prueba original en Gödel [1931]; sin embargo, para que fuese completamente preciso, deberían haberse añadido algunas palabras sobre el simbolismo usado para denotar las filas de signos del sistema. Obsérvese que $\Pi\mathsf{v}(\sim(\beta(\mathsf{v}, \delta(\mathsf{z}_p, \mathsf{z}_p))))$ *no es* la sentencia indecidible, sino que sólo la *denota*.

fuerte (es decir, si para cada α no son deducibles a la vez α y $\sim(\alpha)$), entonces $\varphi(z_p)$ no es deducible. Pero $\forall xyz(\neg(x\ B\ y \wedge z\ B\ Neg(y)))$ es una afirmación de que nuestro sistema está libre de contradicciones en el sentido fuerte. Por consiguiente, hemos probado que $\forall xyz(\neg(x\ B\ y \wedge z\ B\ Neg(y))) \rightarrow \forall x(\neg\, x\ B\ d(p, p))$. Los razonamientos más bien simples empleados en esta prueba pueden ser calcados en la lógica formal para obtener una deducción de $Contrad \supset \Pi v(\sim(\beta(v, \delta(z_p, z_p)))$, donde *Contrad* es una fórmula del sistema que expresa la sentencia $\forall xyz(\neg(x\ B\ y \wedge z\ B\ Neg(y)))$. Entonces, si también fuese deducible *Contrad*, podríamos usar la Regla 1 para inferir $\Pi v(\sim(\beta(v, \delta(z_p, z_p))))$ o $\varphi(z_p)$, en cuyo caso, como ya se ha visto, el sistema contendría una contradicción. De aquí que *Contrad* no pueda ser deducido en el mismo sistema, a menos que el sistema contenga una contradicción.

6. Condiciones que un sistema formal debe satisfacer para que los anteriores argumentos sean aplicables

Consideremos ahora un sistema formal (en el sentido del apartado 1) que satisfaga las cinco siguientes condiciones:

(1) Suponiendo que los signos y las filas de signos hayan sido numerados de un modo similar al efectuado para el sistema particular antes considerado, entonces la clase de los axiomas y la relación de inferencia inmediata serán recursivas primitivas.

Esta es una condición precisa que en la práctica sirve de sustituto a la imprecisa exigencia del apartado 1, de que la clase de los axiomas y la relación de inferencia inmediata sean constructivas.

(2) Existirán ciertas secuencias de expresiones z_n (que representen a los números naturales n) tales que la relación entre n y el número representado por z_n sea recursiva primitiva.

(3) Existirá un signo $\sim$ (negador) y dos signos v, w (variables) tales que para cada relación diádica recursiva primitiva habrá una fórmula $\alpha(v, w)$ del sistema tal que $\alpha(z_p, z_q)$ es deducible si la relación se da entre p y q, y $\sim(\alpha(z_p, z_q))$ es

deducible si p y q no están en esa relación; también puede haber en vez del signo $\sim$ una fila de signos $\zeta(\mathrm{x})$ que no contenga a v ni a w y tal que lo anterior sigue valiendo si consideramos que $\sim(\alpha)$ está en lugar de $\zeta(\alpha)$.

Las filas de signos $\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{w})$ que representen relaciones recursivas primitivas y sus negaciones $\sim(\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{w}))$ se llamarán *fórmulas relacionales diádicas recursivas primitivas;* y $\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{z}_n)$ y $\sim(\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{z}_n))$, *fórmulas relacionales monádicas recursivas primitivas.*

(4) Habrá un signo Π tal que si $\Pi\mathrm{v}(\alpha(\mathrm{v}))$ es deducible para una fórmula relacional monádica recursiva primitiva $\alpha(\mathrm{v})$, entonces para todo k será deducible $\alpha(\mathrm{z}_k)$; en vez del signo simple Π, puede haber una fila de signos $\zeta(\mathrm{x})$ que no contenga a v y tal que lo anterior valga también cuando $\Pi\mathrm{v}(\alpha(\mathrm{v}))$ está en vez de $\zeta(\alpha(\mathrm{v}))$.

(5) El sistema estará libre de contradicciones en los dos siguientes sentidos:

a) Si $\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{w})$ es una fórmula relacional diádica recursiva primitiva, entonces no serán deducibles a la vez $\alpha(\mathrm{z}_p, \mathrm{z}_q)$ y $\sim(\alpha(\mathrm{z}_p, \mathrm{z}_q))$.

b) Si $\alpha(\mathrm{v})$ es una fórmula relacional monádica recursiva primitiva, entonces no serán deducibles todas las fórmulas $\sim(\Pi\mathrm{v}(\alpha(\mathrm{v})))$, $\alpha(\mathrm{z}_0)$, $\alpha(\mathrm{z}_1)$, $\alpha(\mathrm{z}_2)$, ...

Usando (1), $x\ B\ y$, $d(x, y)$ y $k\ B\ d(n, n)$ (tal como antes han sido definidas) son recursivas primitivas. Entonces, por (3) hay una $\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{w})$ tal que si $k\ B\ d(n, n)$, entonces $\alpha(\mathrm{z}_k, \mathrm{z}_n)$ es deducible, y si $\neg k\ B\ d(n, n)$, entonces es deducible $\sim(\alpha(\mathrm{z}_k, \mathrm{z}_n))$. Teniendo en cuenta que $\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{w})$ tiene el mismo papel que $\beta(\mathrm{v}, \delta(\mathrm{w}, \mathrm{w}))$ en nuestro sistema formal, podemos probar con razonamientos similares a los del apartado 5 que si p es el número de $\Pi\mathrm{v}(\sim(\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{w})))$, entonces (5a) implica que no es deducible $\Pi\mathrm{v}(\sim(\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{z}_p)))$, y (5a), junto con (5b), implica que $\sim(\Pi\mathrm{v}(\sim(\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{z}_p))))$ no es deducible. También, como antes puede establecerse, que $\forall xyz(\neg(x\ B\ y \wedge z\ B\ Neg(y)) \rightarrow \forall x(\neg x\ B\ d(p, p))$. No enumeramos las posteriores condiciones bajo las cuales es posible convertir una prueba intuitiva de esto en una deducción de $Contrad \supset \Pi\mathrm{v}(\sim(\alpha(\mathrm{v}, \mathrm{z}_p)))$. (Siendo *Contrad* definido como antes.) Son, sin embargo, condiciones satisfechas por todos los sistemas

del tipo en consideración que contienen una cierta porción de aritmética ordinaria, y por tanto estos sistemas no pueden contener una prueba de su propia consistencia.

7. Relación de los anteriores argumentos con las paradojas

Hemos visto que podemos construir en un sistema formal afirmaciones sobre el sistema formal, algunas de las cuales pueden ser deducidas, mientras que otras no, según lo que digan sobre el sistema. Compararemos este hecho con la famosa paradoja de Epiménides («El mentiroso»). Supóngase que el 4 de mayo de 1934 *X* hace una única afirmación: «Cualquier afirmación que *X* haga el 4 de mayo de 1934 es falsa.» Claramente esta afirmación no puede ser verdadera. Tampoco puede ser falsa, pues el único modo de que sea falsa es que *X* haya hecho una afirmación verdadera en el tiempo especificado y en ese tiempo sólo hizo la afirmación citada.

La solución que Whitehead y Russell sugirieron, que una sentencia no puede decir nada sobre sí misma, es demasiado drástica. Hemos visto que podemos construir sentencias que hacen afirmaciones sobre sí mismas, y de hecho son sentencias que sólo contienen funciones definidas recursivamente y por ello tienen sin duda significado. Incluso es posible construir para cada propiedad metamatemática *P* que puede ser expresada en el sistema una sentencia que diga de sí misma que tiene esa propiedad[23]. Si suponemos que $\alpha(\mathrm{z}_n)$ significa que *n* es el número de una fila de signos que tiene la propiedad *P*, entonces, si $\alpha(\delta(\mathrm{w}, \mathrm{w}))$ tiene el número *p*, $\alpha(\delta(\mathrm{z}_p, \mathrm{z}_p))$ dice que ella misma tiene la propiedad *P*[24]. Esta construcción sólo se puede llevar a cabo si la propiedad *P* puede expresarse en el sistema, y la solución de la paradoja de Epiménides estriba en que esto último no es posible para cualquier propiedad metamatemática. Consideremos la anterior afirmación hecha por *X*. *X* debe especificar un

[23] Esto fue observado por primera vez por R. Carnap en Carnap [1934], pág. 91.

[24] Naturalmente, podemos encontrar propiedades *P* para las cuales $\alpha(\delta(\mathrm{z}_p, \mathrm{z}_p))$ es deducible y otras para las cuales esto no es deducible.

lenguaje *L* y decir que cualquier afirmación que él haya hecho en el tiempo determinado es una afirmación falsa en *L*. Pero «afirmación falsa en *L*» no puede expresarse en *L*, de modo que su afirmación estaba en algún otro lenguaje y por tanto desaparece la paradoja.

La paradoja puede considerarse como una prueba de que «afirmación falsa en *L*» no puede expresarse en *L*[25]. Quisiéramos ahora establecer este hecho de una manera más formal para de este modo obtener un argumento heurístico sobre la existencia de sentencias indecidibles. Supongamos que $\vartheta(z_n)$ significa que la fórmula cuyo número es *n* es verdadera. Esto es, si *n* es el número de α, entonces $\vartheta(z_n)$ será equivalente a α. Podríamos entonces aplicar nuestro procedimiento a $\sim(\vartheta(\delta(w, w)))$, obteniendo $\sim(\vartheta(\delta(z_p, z_p)))$, que dice de ella misma que es falsa, y esto conduce a una contradicción similar a la de «Epiménides». Pero, por otro lado, $\Sigma v(\beta(v, z_k))$ es una afirmación en el sistema del hecho de que la fórmula de número *k* es deducible. De este modo vemos que la clase *A* de números de fórmulas verdaderas no puese expresarse mediante una fórmula abierta de nuestro sistema, mientras que sí puede expresarse la clase *B* de los de fórmulas deducibles. De aquí se sigue que $A \neq B$, y como suponemos que $B \subseteq A$ (es decir, que cada fórmula deducible es verdadera), tenemos que $B \subset A$, es decir, que hay una sentencia α que es verdadera pero no es deducible. Entonces $\sim(\alpha)$ no es verdadera y en consecuencia no es deducible, esto es, α es indecidible[26].

---

[25] Para un examen más detallado de este hecho, véase Tarski [1933] (artículos traducidos al inglés en Tarski [1956] (véanse en especial las págs. 247 y ss.)) y Tarski [1944]. En estos dos artículos se discute sistemáticamente el concepto de verdad relativo a las sentencias de un lenguaje. Véase también Carnap [1934a].

[26] Obsérvese que este argumento puede llevarse a cabo con absoluta precisión para cualquier sistema cuyas filas de signos tengan un significado bien definido, en el supuesto de que los axiomas y las reglas de inferencia sean correctos respecto a este significado y que el sistema contenga a la aritmética. Se obtiene así una prueba de la existencia de sentencias indecidibles en este sistema, pero no un ejemplo particular de una sentencia indecidible.

8. Equivalentes diofánticos de sentencias indecidibles

Supongamos que $Q(x_1, \dots, x_n)$ es un polinomio con coeficientes enteros. Mediante el uso de cuantificadores lógicos $\forall x$ y $\exists x$[27] podemos hacer ciertas afirmaciones sobre las soluciones en números naturales de la ecuación diofántica $Q(x_1, \dots, x_2)=0$. Así, $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n\ (Q(x_1, \dots, x_n)=0)$ dice que hay una solución; $\forall x_3 \exists x_1 \exists x_2 \exists x_4 \dots \exists x_n (Q(x_1, \dots, x_n)=0)$ dice que para cualquier valor dado de x_3 la ecuación resultante tiene una solución, etc. Quisiéramos probar que hay una secuencia de cuantificadores lógicos π y una ecuación diofántica $Q=0$ tal que nuestra sentencia indecidible es equivalente a $\pi(Q=0)$.

Para probar esto es conveniente hacer uso del concepto intermediario de expresión aritmética, esto es, de expresión construida con $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, +, \times, =$, números naturales, variables de números naturales y los cuantificadores $\forall x$ y $\exists x$[27].

Definimos por inducción:

1. Si P y Q[28] están construidas con variables, números naturales, $+$ y $\times$, entonces $P=Q$ es una expresión aritmética.

2. Si α y β son expresiones aritméticas, entonces $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son expresiones aritméticas.

3. Si α es una expresión aritmética que contiene a x como variable libre, entonces $\forall x \alpha$ y $\exists x \alpha$ son expresiones aritméticas.

Probaremos en primer lugar que si $f(x_1, \dots, x_n)$ es recursiva primitiva, entonces hay una expresión aritmética $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ tal que $\alpha(x_1, \dots, x_n, y) \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n)=y$, y en segundo lugar, que si $\beta(x_1, \dots, x_n)$ es una expresión aritmética, entonces hay polinomios $Q(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ y $P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, cuyos coeficientes son números naturales y una secuencia π de cuantificadores tales que $\beta(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \pi(Q(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)=P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$, donde las x y las y toman valores sobre los números naturales. Como nuestra sentencia indecidible tiene la forma $\forall x \psi(x)$, siendo ψ recursiva primitiva, hay una función recursiva

[27] Donde x es cualquier variable de número natural.

[28] Esto es, si Q y P son polinomios con coeficientes que sean números naturales.

primitiva $f(x)$ tal que nuestra sentencia indecidible es equivalente a $\forall x(f(x)=0)$. Hay entonces una expresión aritmética $\beta(x, y)$ tal que $f(x)=y \leftrightarrow \beta(x, y)$ y hay polinomios $Q(x, y, z_1, \ldots, z_m)$ y $P(x, y, z_1, \ldots, z_m)$ cuyos coeficientes son números naturales y una secuencia de cuantificadores π tales que $\beta(x, y) \leftrightarrow \pi(Q(x, y, z_1, \ldots, z_m)=P(x, y, z_1, \ldots, z_m))$. Entonces nuestra sentencia indecidible es equivalente a $\forall x \pi(Q(x, 0, z_1, \ldots, z_m)=P(x, 0, z_1, \ldots, z_m))$.

Probamos en primer lugar que las funciones recursivas primitivas son expresables aritméticamente.

Si $f(x)=x+1$, entonces $f(x)=y \leftrightarrow x+1=y$.

Si $f(x_1, \ldots, x_n)=c$, entonces $f(x_1, \ldots, x_n)=w \leftrightarrow w=c$.

Similarmente para las funciones proyectivas $U_j^n(x_1, \ldots, x_n)$.

Si $g(x_1, \ldots, x_m)=y \leftrightarrow \alpha(x_1, \ldots, x_m, y)$, $h_i(x_1, \ldots, x_n)=y \leftrightarrow \beta_i(x_1, \ldots, x_n, y)$ y $f(x_1, \ldots, x_n)=g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$, entonces $f(x_1, \ldots, x_n)=y \leftrightarrow \exists u_1 \ldots \exists u_m(\beta_1(x_1, \ldots, x_n, u_1) \wedge \ldots \wedge \beta_m(x_1, \ldots, x_n, u_m) \wedge \alpha(u_1, \ldots, u_m, y))$.

En cuanto al caso en que f es recursiva primitiva respecto a g y h, precisamos una expresión aritmética para $b(c, d, i)=y$, donde $b(c, d, i)$ es una cierta función que tiene la propiedad de que para cada número natural k dado y para cada función $q(i)$ de números naturales se pueden encontrar números naturales c y d tales que $b(c, d, i)=q(i)$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$. Podemos definir $x \equiv y (mod\ z)$ como $\exists u(x=y+u \cdot z \vee y=x+u \cdot z)$, y $x \geqslant y$ como $\exists u(x=y+u)$[29]. Entonces definimos $b(c, d, i)$, de modo que sea el mínimo residuo no negativo de c módulo $1+(i+1) \cdot d$, es decir, $b(c, d, i)=z \leftrightarrow z \equiv c$ $(mod\ 1+(i+1) \cdot d) \wedge z \leqslant (i+1) \cdot d$. Para probar que $b(c, d, i)$ tiene la mencionada propiedad, supongamos una $q(i)$ y un k dados. Escogemos un s mayor que todos los números k, $q(0)$, $q(1)$, ..., $q(k)$. Entonces los números $1+s!$, $1+2 \cdot s!$, ..., $1+(k+1) \cdot s!$ son primos entre sí. La razón es que si un número primo divide a dos de ellos, entonces divide a su diferencia $(i-j) \cdot s!$; pero no puede dividir a $s!$, puesto que divide a $1+i \cdot s!$; tampoco puede dividir a $i-j$, pues $i-j \leqslant k < s$, y por tanto $i-j$ es un factor de $s!$. Entonces si $d=s!$, podemos encontrar un c tal que $c \equiv q(i)$ (mod $1+(i+1)$

[29] Si permitiésemos que las variables tomasen valores sobre los enteros tanto negativos como positivos en vez de sobre los números naturales, podríamos definir $x \geqslant y$ como $\exists u_1 \ldots \exists u_4$ $(x=y+u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)$, pues cualquier número entero positivo es la suma de cuatro cuadrados.

$\cdot d)$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$, puesto que $1+s!, \ldots, 1+(k+1)\cdot s!$ son primos entre sí. Como $s>q(i)$ y por tanto $1+(i+1)\cdot s!>q(i)$, tenemos que $q(i)=b(c, d, i)$, que es lo que se quería probar.

Si $g(x_1, \ldots, x_{n-1})=y \leftrightarrow \alpha(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$, $h(x_1, \ldots, x_{n+1})=y \leftrightarrow \beta(x_1, \ldots, x_{n+1}, y)$, $f(0, x_2, \ldots, x_n)=g(x_2, \ldots, x_n)$ y $f(k+1, x_2, \ldots, x_n)=h(k, f(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$, entonces $f(x_1, \ldots, x_n)=y \leftrightarrow \exists q(\alpha(x_2, \ldots, x_n, q(0)) \wedge \forall u(u+1 \leqslant x_1 \rightarrow \beta(u, q(u), x_2, \ldots, x_n, q(u+1))) \wedge q(x_1)=y)$. Pero si hay una q que satisfaga esta condición, entonces hay un c y un d tales que $b(c, d, i)=q(i)$ $(0 \leqslant i \leqslant x_1)$ y por tanto $\exists c \exists d(\alpha(x_2, \ldots, x_n, b(c, d, 0)) \wedge \forall u(u+1 \leqslant x_1 \rightarrow \beta(u, b(c, d, u), x_2, \ldots, x_n, b(c, d, u+1))) \wedge b(c, d, x_1)=y)$. A la inversa, esto implica obviamente la expresión original. La última fórmula puede transformarse en la expresión aritmética $\exists c \exists d(\exists v(\alpha(x_2, \ldots, x_n, v) \wedge v=b(c, d, 0)) \wedge \forall u(u+1 \leqslant x_1 \rightarrow \exists v \exists w(\beta(u, v, x_2, \ldots, x_n, w) \wedge v=b(c, d, u) \wedge w=b(c, d, u+1))) \wedge y=b(c, d, x_1))$, sustituyendo $\alpha(x_2, \ldots, x_n, b(c, d, 0))$ por $\exists v(\alpha(x_2, \ldots, x_n, v) \wedge v=b(c, d, 0))$ y sustituyendo $\beta(u, b(c, d, u), x_2, \ldots, x_n, b(c, d, u+1))$ por $\exists v \exists w(\beta(u, v, x_2, \ldots, x_n, w) \wedge v=b(c, d, u) \wedge w=b(c, d, u+1))$. Esto completa la prueba de que todas las funciones recursivas primitivas son expresables aritméticamente.

Probamos a continuación que cualquier expresión aritmética es equivalente a una forma normal $\pi(Q=P)$, donde P y Q son polinomios cuyos coeficientes son números naturales.

Si en una expresión aritmética no aparecen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, ni cuantificadores, entonces tiene la forma normal exigida por definición (pág. 174).

Supongamos que $\alpha \leftrightarrow \pi(P=Q)$, donde x no aparece en la secuencia de cuantificadores que π denota. Entonces $\forall x\ \alpha \leftrightarrow \forall x\ \pi(P=Q)$ y $\exists x\ \alpha \leftrightarrow \exists x\ \pi(P=Q)$.

Supongamos también que $\beta \leftrightarrow \pi'(P'=Q')$, donde las variables de π' son distintas de las de π. Entonces, gracias al hecho de que $\psi \vee \exists x\ \varphi(x) \leftrightarrow \exists x(\psi \vee \varphi(x))$ y de que $\psi \vee \forall x\ \varphi(x) \leftrightarrow \forall x(\psi \vee \varphi(x))$, si x no está libre en ψ, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\alpha \vee \beta & \leftrightarrow \pi\pi'(Q=P \vee Q'=P') \\
& \leftrightarrow \pi\pi'(Q-P=0 \vee Q'-P'=0) \\
& \leftrightarrow \pi\pi'((Q-P)\cdot(Q'-P')=0) \\
& \leftrightarrow \pi\pi'(Q\cdot Q'+P\cdot P'=Q'\cdot P+Q\cdot P')
\end{aligned}
$$

Además, $\neg\alpha\leftrightarrow\neg\pi(Q=P)$. Entonces, como $\neg\forall x\ \varphi\leftrightarrow\exists x\neg\varphi$ y $\neg\exists x\ \varphi\leftrightarrow\forall x\neg\varphi$, podemos introducir el negador en los cuantificadores π y obtener un π'' tal que

$$\begin{aligned}\neg\alpha &\leftrightarrow \pi''(\neg Q=P)\\ &\leftrightarrow \pi''((Q-P)^2>0)\\ &\leftrightarrow \pi''(Q^2+P^2\geqslant 2\cdot Q\cdot P+1)\\ &\leftrightarrow \pi''\exists u(Q^2+P^2=2\cdot Q\cdot P+u+1)\end{aligned}$$

$\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ son expresables mediante $\neg$ y $\vee$.

Modificando ligeramente el argumento se puede permitir que las variables tomen valores sobre todos los números enteros, en vez de sólo sobre los números naturales.

Existe, pues, una afirmación sobre las soluciones de una ecuación diofántica que no es decidible en nuestro sistema formal. Puede probarse que es decidible en el tipo inmediatamente superior, pero entonces hay una nueva afirmación que no es decidible incluso en ese tipo, pero sí lo es en el inmediatamente siguiente, y así sucesivamente (incluyendo iteraciones transfinitas, describibles en teoría de conjuntos, como las que aparecen, por ejemplo, en los axiomas más fuertes de infinitud). En otras palabras, sobre la base de los principios deductivos usados hoy en día en matemáticas[30] no puede haber ninguna teoría completa de análisis diofántico, ni incluso de problemas de la forma $\pi\ (Q=0)$.

Presburger ha dado un conjunto de axiomas para las relaciones construibles con $+$, $=$, y signos lógicos junto con un método para decidir tales relaciones[31]. Skolem ha esbozado un método para decidir relaciones construidas con $\times$ en vez de $+$[32]. Sin embargo, en base a los principios deductivos usados hoy en matemáticas, no se puede establecer ningún método

---

30 ⟦Nota añadida en 1964⟧: Obsérvese que los axiomas sobre *todos* los conjuntos o sobre clases de conjuntos que hoy se aceptan no llevan más lejos porque se supone que también valen para conjuntos de cierto tipo definido (o «rango», según la actual terminología). Véase Levy [1960a]. Los principios deductivos de las matemáticas intuicionistas no se toman en cuenta aquí, pues hasta el momento han probado ser más débiles que los de la matemática clásica.

31 Véase Presburger [1929].

32 Véase Skolem [1930].

general para decidir relaciones en las que aparecen a la vez + y ×, pues (como antes se ha probado) no puede haber, sobre esta base, ninguna teoría completa de los problemas diofánticos de la forma $\pi(Q=0)$[33].

9. Funciones recursivas

Si $g(y)$ y $h(x)$ son funciones recursivas primitivas dadas, entonces la función $f(x, y)$ definida inductivamente de modo que $f(0, y)=g(y)$, $f(x+1, 0)=h(x)$, $f(x+1, y+1)=f(x, f(x+1, y))$ no es en general recursiva primitiva en el sentido limitado del apartado 2. Este es un ejemplo de una definición por inducción simultánea respecto a dos variables[34].

Para obtener definiciones aritméticas de tales funciones tenemos que generalizar nuestra función *b*. La consideración de varios tipos de funciones definidas por inducción conduce a la pregunta de qué se quiere decir con «cualquier función recursiva».

Se puede intentar definir esta noción del siguiente modo: si f es una función desconocida y $g_1, \dots, g_n$ son funciones conocidas, las g_i y f se sustituyen una en otra de los modos más generales y ciertos pares de las expresiones resultantes se igualan entonces si el conjunto resultante de ecuaciones de funciones tiene una y sólo una solución para f, entonces f es una función recursiva[35].

[33] ⟦Nota añadida en 1964⟧: Cuando hablamos de una teoría completa de alguna clase de problemas en base a ciertos principios de demostración, nos referimos a un teorema, demostrable sobre esa base, que indica que (y cómo) puede obtenerse la solución de cualquier problema de esa clase en base a esos principios. En la posdata se encontrará una versión diferente y más definitiva de este resultado de incompletud.

[34] ⟦Nota añadida en 1964⟧: W. Ackermann probó (véase Ackermann [1928a]) que una función muy similar no podía ser definida mediante recursión respecto a una sola variable.

[35] Esto lo sugirió Herbrand en una comunicación privada ⟦añadido en 1964⟧: Dio una formulación ligeramente diferente en Herbrand [1931], donde hablaba de «computabilidad». Sin embargo, tampoco en esta definición exigía computabilidad mediante reglas formales definidas (obsérvese la frase «considerèe intuitionistiquement» y la nota 5). En matemáticas intuicionistas, las dos definiciones de Herbrand son trivialmente equivalentes. En matemática clásica,

Podríamos entonces tener:

$f(x, 0) = g_1(x)$
$f(0, y+1) = g_2(y)$
$f(1, y+1) = g_3(y)$
$f(x+2, y+1) = g_4(f(x, y+2), f(x, f(x, y+2)))$

Estableceremos dos restricciones en la definición de Herbrand. La primera consiste en que el lado izquierdo de cada una de las ecuaciones de funciones que definen a f sea de la forma

$$f(g_{i1}(x_1, \dots, x_n), g_{i2}(x_1, \dots, x_n), \dots, g_{ij}(x_1, \dots, x_n)).$$

La segunda (como se verá después) es equivalente a la condición de que todos los conjuntos posibles de argumentos $(n_1, \dots, n_j)$ de f puedan disponerse de tal modo que la computación del valor de f para cualquier conjunto de argumentos $(n_1, \dots, n_j)$ mediante las ecuaciones dadas requiera únicamente el conocimiento de los valores de f para argumentos que preceden a $(n_1, \dots, n_j)$.

A partir del conjunto dado de ecuaciones de funciones definimos inductivamente un conjunto de ecuaciones derivadas del siguiente modo:

(1a) Cualquier expresión obtenible reemplazando por números naturales todas las variables de una de las ecuaciones dadas es una ecuación derivada.

(1b) Si $k_1, \dots, k_n$ son números naturales y $g_{ij}(k_1, \dots, k_n) = m$ es una igualdad verdadera, entonces $g_{ij}(k_1, \dots, k_n) = m$ es una ecuación derivada.

(2a) Si $g_{ij}(k_1, \dots, k_n) = m$ es una ecuación derivada, entonces la igualdad obtenida sustituyendo una aparición de $g_{ij}(k_1, \dots, k_n)$ por m en una ecuación derivada es una ecuación derivada.

(2b) Si $f(k_1, \dots, k_n) = m$ es una ecuación derivada, siendo $k_1, \dots, k_n$, m números naturales, entonces la expresión obtenida al

L. Kalmar probó (véase Kalmar [1955], pág. 93) la no equivalencia de la recursividad con el primer concepto mencionado de Herbrand. Si el segundo concepto de Herbrand es equivalente a la recursividad, es una extensa cuestión epistemológica que todavía no ha sido respuesta. Véase la posdata.

sustituir una ocurrencia de $f(k_1, \ldots, k_n)$ por m en el lado derecho de una ecuación derivada es una ecuación derivada.

Nuestra segunda restricción a la definición de Herbrand es entonces que para cada conjunto de números naturales $k_1, \ldots, k_n$ haya un único m tal que $f(k_1, \ldots, k_n)=m$ sea una ecuación derivada.

Usando esta definición de la noción de función recursiva podemos probar que si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es recursiva, entonces hay una expresión aritmética $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = y \leftrightarrow \alpha(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Posdata

Como consecuencia de posteriores avances, en particular del hecho de que, debido a la obra de A. M. Turing, ahora se puede dar una definición precisa, adecuada e incuestionable del concepto general de sistema formal, se puede probar rigurosamente que en *cualquier* sistema formal que contenga una cierta cantidad de teoría numérica finitaria existen sentencias aritméticas indecidibles y que no se puede probar la consistencia del sistema en el mismo sistema.

La obra de Turing proporciona un análisis del concepto de «procedimiento mecánico» («algoritmo», «procedimiento computacional» o «procedimiento combinatorio finito»). Se ha probado que este concepto es equivalente al de «Máquina de Turing»[36]. Puede definirse un sistema formal simplemente como un procedimiento mecánico para producir filas de signos, llamadas fórmulas deducibles. Para cada sistema formal definido en este sentido existe un sistema formal definido como en la página 151, que tiene las mismas fórmulas deducibles (y viceversa) en el supuesto de que el término «procedimiento finito» que aparece en la página 151 se entiende como «procedimiento mecánico». Sin embargo, el concepto de sistema formal, cuya esencia consiste en la sustitución del razonamiento por operaciones

---

[36] Véase Turing [1937] y el artículo casi simultáneo de Post (Post [1936]). Respecto a previas definiciones equivalentes de computabilidad que, sin embargo, son menos útiles para nuestro propósito, véase Church [1936a]. Una de estas definiciones se da en el apartado 9 de este artículo.

mecánicas con filas de signos, exige este significado. (Obsérvese que la cuestión de si existen procedimientos *no-mecánicos* finitos[37] no equivalentes a ningún algoritmo no tiene nada que ver con la adecuación de la definición de «sistema formal» y de «procedimiento mecánico».)

Supuestas estas definiciones que acabamos de mencionar, se hace superflua la condición (1) del apartado 6, pues para cada sistema formal hay un predicado de la forma $\exists x\ x\ B\ y$, donde B es recursiva primitiva. Además se pueden probar los dos resultados de incompletitud del final del apartado 8 en la forma definitiva: «No hay ninguna *teoría formalizada* que tenga respuesta para todos los problemas diofánticos de la forma $\pi(Q = O)$», y «No hay ningún *algoritmo* para decidir relaciones en las que aparezcan a la vez $+$ y $\times$». (En cuanto a teorías y procedimientos en el sentido más general indicado en la nota 37, la situación puede ser diferente. Téngase en cuenta que los resultados mencionados en esta posdata no establecen límites de la capacidad de la razón humana, sino más bien de las posibilidades del puro formalismo en matemáticas[38]). En tercer lugar, si

---

[37] Es decir, tales que impliquen el uso de términos abstractos sobre la base de su significado. Véase Gödel [1958].

[38] ⟦Nota añadida con posterioridad a 1964⟧:

Turing, en *Proc. Lond. Math. Soc.*, 42 (1937), pág. 250, ofrece una argumentación que se supone muestra que los procedimientos mentales no pueden llevar más lejos que los procedimientos mecánicos. Sin embargo esta argumentación es inconcluyente, pues depende de la suposición de que una mente finita sólo es susceptible de tener un número finito de estados distinguibles. De lo que Turing no se da cuenta es del hecho de que *la mente, en su uso, no es estática, sino que está en constante desarrollo.* Esto se ve, por ejemplo, considerando la serie infinita de los axiomas de infinitud cada vez más potentes en la teoría de conjuntos, cada uno de los cuales expresa una nueva idea o intuición. Un proceso similar ocurre respecto a los términos primitivos. Por ejemplo, el concepto iterativo de conjunto sólo se aclaró en las últimas décadas. Varias otras nociones más primitivas aparecen ahora en el horizonte, por ejemplo, el concepto autorreflexivo de clase propia. Por tanto, aunque en cada estadio del desarrollo de la mente el número de sus posibles estados es finito, no hay razón ninguna por la que este número no podría converger hacia el infinito en el curso de su desarrollo. Es posible que haya métodos sistemáticos para acelerar, especializar y determinar unívocamente este desarrollo, por ejemplo, haciendo las preguntas adecuadas en base a un procedimiento mecánico. Pero hay que admitir que la definición precisa de un procedimiento de este tipo requeriría una profundización sustancial de nuestra comprensión de las operaciones básicas de la mente. Sin embargo, ya conocemos

se entiende que «procedimiento finito» significa «procedimiento mecánico», puede responderse afirmativamente a la pregunta planteada en la nota 2 en lo que respecta a la recursividad tal y como es definida en el apartado 9, que es equivalente a la recursividad que hoy se define. (Véase Kleene [1936] y Kleene [1952], págs. 220ss y 232ss.)

En cuanto a la eliminación de la ω-consistencia (llevada a cabo por primera vez por J. B. Rosser (véase Rosser [1936]); véase Tarski [1953], pág. 49, Cor. 2. En Hilbert y Bernays [1939], págs. 297-324, se llevó a cabo la prueba de la indeducibilidad de la consistencia de un sistema en el mismo sistema para la teoría de números. La prueba puede trasladarse casi literalmente a cualquier sistema que contenga entre sus axiomas y reglas de inferencia los axiomas y reglas de inferencia de la teoría de números. Respecto a las consecuencias para el programa de Hilbert, véase Gödel [1958] y el material allí citado. Véase también Kreisel [1958].

Con un ligero refuerzo de los métodos usados antes en el apartado 8 se puede probar fácilmente que el prefijo de la sentencia indecidible consta de un bloque de cuantificadores universales seguido de un bloque de cuantificadores particulares y que, además, el grado del polinomio es 4 (resultado no publicado).

Un cierto número de erratas y equivocaciones del artículo original multicopiado han sido corregidas en esta edición. Estoy agradecido al profesor Martin Davis por llamar mi atención sobre ellos.

Kurt Gödel.

Princeton, N. J.
3 de junio de 1964.

---

procedimientos vagamente definidos de este tipo, por ejemplo, el proceso de definir buen-órdenes recursivos de números naturales que representan ordinales cada vez mayores o el proceso de formar axiomas de infinitud cada vez más potentes en teoría de conjuntos.

Introducción a:
Recensión de Th. Skolem [1933]: *«Sobre la imposibilidad de una caracterización completa de la serie numérica mediante un conjunto finito de axiomas.»*

Una teoría axiomática es categórica si todos sus modelos son isomorfos entre sí. En ese caso podemos decir que la teoría caracteriza unívocamente la estructura de sus modelos. En 1933 Thoralf Skolem publicó un artículo probando que ninguna teoría aritmética de primer orden es categórica, pues toda teoría aritmética de primer orden tiene modelos (no-estándar) que no son isomorfos con el sistema de los números naturales, pero para los que valen todas las afirmaciones de primer orden que se puedan hacen sobre los números naturales Es decir, el sistema $\mathcal{N}$ de los números naturales y el sistema no-estándar $\mathcal{N}^*$ construido por Skolem no son isomorfos, pero sí son (lo que luego se llamaría) elementalmente equivalentes, es decir, satisfacen exactamente las mismas sentencias de primer orden. Gödel publicó una corta recensión del artículo de Skolem, en la que señala que el resultado de la no categoricidad de la aritmética de primer orden ya se sigue fácilmente de sus propias investigaciones en Gödel [1931], lo cual es cierto. Incluso se sigue ya del teorema X (de compacidad) de Gödel [1930]. Pero a Gödel se le escapó la importancia de los métodos empleados por Skolem en su prueba, que constituyen un precedente de las operaciones con ultraproductos que preservan la equivalencia elemental.

El artículo de Skolem –*Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems* (Sobre la imposibilidad de una caracterización completa de la serie numérica mediante un conjunto finito de axiomas)– apareció en 1933 en la revista noruega *Norsk matematisk forenings skrifter*, ser. II, n. 10, págs. 73-82. La recensión de Gödel apareció en 1934 en el fascículo 5 del volumen 7 de la revista alemana de recensiones *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete.*

RECENSION DE TH. SKOLEM [1933]: «SOBRE LA IMPOSIBILIDAD DE UNA CARACTERIZACION COMPLETA DE LA SERIE NUMERICA MEDIANTE UN CONJUNTO FINITO DE AXIOMAS.»

Consideremos las fórmulas que pueden formarse a partir de: 1.° variables x, y, ..., cuyo dominio de variabilidad está constituido por los números naturales; 2.° $+$ (adición) y $\cdot$ (multiplicación); 3.° $>$ y $=$; 4.° los conectores del cálculo conectivo; 5.° los cuantificadores, referidos a variables numéricas. (Funciones más complicadas, como, por ejemplo, $x!$, x^y, pueden ser definidas mediante $+$, $\cdot$ y las nociones lógicas mencionadas.) El autor prueba que hay un sistema $\mathcal{N}^*$ de cosas con dos operaciones $+$, $\cdot$ y dos relaciones $>$, $=$ definidas en él, que no es isomorfo con el sistema $\mathcal{N}$ de los número naturales, pero para el que sin embargo resultan válidas todas las sentencias expresables mediante los signos citados al principio, que son válidas para el sistema $\mathcal{N}$. De aquí se sigue que no hay ningún conjunto de axiomas que sólo utilice los conceptos indicados al principio (y por tanto, que no hay ninguno que utilice sólo conceptos de la teoría de números) que determine unívocamente la estructura de la serie numérica, un resultado que también se sigue sin dificultad de mis investigaciones en *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 174. El sistema $\mathcal{N}^*$ construido por el autor consta de las funciones $f_i(x)$ definibles mediante los conceptos citados al principio, entre las que se define una relación $>$ de tal manera que primero se determina una función $g(x)$, tal que para cada par

f_i, f_j ocurre que o bien $f_i(g(x)) > f_j(g(x))$ o bien $f_i(g(x)) = f_j(g(x))$ o bien $f_i(g(x)) < f_j(g(x))$ para casi todos los x. Las operaciones $+$, $\cdot$ se definen para las f_i del modo usual. Naturalmente con ayuda de otros conceptos distintos de los citados al principio es posible construir sentencias que resulten válidas en $\mathcal{N}^*$, pero no en $\mathcal{N}$, de lo cual se ofrecen algunos ejemplos.

Introducción a:
[*Observación sobre la demanda*]

Durante la 80 sesión del coloquio matemático de Menger, celebrada el 6 de noviembre de 1934, Abraham Wald presentó su comunicación Wald [1936], donde, siguiendo investigaciones previas de los economistas Walras, Cassel y Schlesinger, se preguntaba por las condiciones bajo las cuales los sistemas de ecuaciones no lineales de ciertas teorías de la demanda tendrían soluciones unívocas. Gödel observó a continuación que la demanda depende también de los ingresos del empresario y, por tanto, del precio de los factores de producción, aunque no dio pista alguna sobre cuál sería el correspondiente sistema «adecuado» de ecuaciones, cuya solubilidad habría que estudiar. Su breve observación apareció sin título en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, núm. 7 (1934-35), pág. 6, publicado en 1936.

Jesús Mosterín

[OBSERVACION SOBRE LA DEMANDA]

En realidad la demanda de cada empresario depende también de sus ingresos, y éstos a su vez dependen del precio de los factores de producción. Se puede formular un sistema de ecuaciones adecuado e investigar si tiene soluciones.

Introducción a: *Sobre la longitud de las deducciones*

En el coloquio matemático que se celebraba regularmente en Viena bajo la dirección de Karl Menger ya en 1931 había presentado Gödel una ponencia –«Sobre completud y consistencia»– en la que indicaba cómo en la sucesión de sistemas formales obtenidos a partir de cierto sistema formal aritmético de primer orden mediante el añadido de variables de tipos cada vez más altos (y de sus correspondientes axiomas de comprensión) ciertos problemas irresolubles en un sistema dado encontraban solución en el sistema siguiente, es decir, ciertas sentencias indecidibles de un sistema se volvían decidibles en el siguiente. Cuatro años más tarde Gödel volvió a intervenir en el citado coloquio con una ponencia sobre el mismo tema, en la que indicaba que no sólo en cada sistema formal de la sucesión indicada devienen deducibles (y por tanto decidibles) sentencias indeducibles (e incluso indecidibles) del sistema anterior, sino que incluso para un número infinito de sentencias deducibles en un sistema dado, sus deducciones pueden ser acortadas de modo extraordinario (por ejemplo, un millón de veces) al pasar al sistema formal siguiente. En resumen, al pasar de un sistema formal a otro de un tipo superior, no sólo podemos deducir cosas nuevas, sino que también podemos simplificar extraordinariamente las deducciones de las cosas que ya antes eran deducibles.

Esta ponencia apareció bajo el título *Über die Länge von Beweisen* (Sobre la longitud de las deducciones) en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, núm. 7 (correspondiente a 1934-35, pero publicado en 1936), págs. 23-24. Está traducida al inglés por Martin Davis (véase Davis [1965], págs. 82-83).

Jesús Mosterín.

SOBRE LA LONGITUD DE LAS DEDUCCIONES

Llamemos *longitud* de una deducción en un sistema formal S al número de fórmulas de que consta. Además, si cada número natural está representado en S por un símbolo determinado, es decir, por un numeral (por ejemplo, un símbolo de la forma $1+1+1+\ldots+1$), entonces una función $f(x)$ puede ser llamada *computable en S* si a cada numeral m corresponde un numeral n tal que $f(m)=n$ es deducible en S. En particular, todas las funciones recursivamente definidas son ya computables en la aritmética clásica (es decir, en el sistema S_1 de la secuencia definida más adelante).

Sea S_i el sistema formal de la lógica de i-avo orden, donde tomamos los números naturales como individuos. Más precisamente, S_i contendrá variables y cuantificadores para números naturales, para clases de números naturales, para clases de clases de números naturales, etc., hasta clases del i-avo tipo, pero no variables de tipo superior. En S_i dispondremos también de los correspondientes axiomas lógicos. Entonces, como es sabido, hay sentencias de S_i que son deducibles en S_{i+1}, pero no en S_i. Por otro lado, si consideramos las fórmulas φ que son deducibles tanto en S_i como en S_{i+1}, entonces resulta lo siguiente: A cada función f computable en S_i corresponden infinitas fórmulas φ, con la propiedad de que si k es la longitud de la deducción

más corta de φ en S_i y l es la longitud de la deducción más corta de φ en S_{i+1}, entonces $k > f(l)$. Por ejemplo, si establecemos $f(n) = 10^6 n$, entonces hay infinitas fórmulas cuya deducción más corta en S_i es más de 10^6 veces más larga que su deducción más corta en S_{i+1}. *El tránsito a la lógica del tipo inmediato superior no sólo permite deducir ciertas sentencias que previamente eran indeducibles, sino que permite también acortar extraordinariamente una infinidad de deducciones de que ya disponíamos.*

Las fórmulas φ para las que vale la inecuación $k > f(l)$ antes mencionada son sentencias aritméticas del mismo carácter que las sentencias indecidibles de S_i construidas por mí, es decir, pueden ser transformadas en la siguiente forma normal:

$$\pi Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,$$

donde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son variables para enteros, Q es un polinomio determinado con coeficientes enteros en las n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ y π denota un prefijo, es decir, una secuencia determinada de cuantificadores universales y existenciales afectando a las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Tal sentencia expresa así una propiedad de la ecuación diofántica $Q = 0$. Por ejemplo, la sentencia

$$\forall x_1 \, \forall x_2 \, \exists x_3 \, \exists x_4 \; Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

asevera que la ecuación diofántica $Q(a, b, x, y) = 0$ tiene soluciones enteras x, y para todos los valores (enteros) de los parámetros, a, b. Si el prefijo contiene cuantificadores universales afectando a $x_{i_1}, x_i^2, \cdots, x_{i_k}$ y cuantificadores existenciales afectando a $x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{j_{n-k}}$, entonces deberíamos considerar $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ como parámetros y la fórmula de arriba afirmaría que para cualesquiera valores de los parámetros existen soluciones $x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{j_{n-k}}$, donde el valor de x_{j_r} depende sólo de los valores de los parámetros que preceden a x_{j_r} en el prefijo.

También puede mostrarse que una función computable en uno de los sistemas S_i, o incluso en un sistema de tipo transfinito, ya es computable en S_1. Así el concepto de «computable» es «absoluto» en cierto sentido, mientras que prácticamente todos los demás conceptos metamatemáticos (como deducible, definible, etc.) dependen de un modo completamente esencial del sistema formal respecto al cual han sido definidos.

Introducción a:
La consistencia del axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo

Después de varios años de esfuerzos, en 1938 logró Gödel probar la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo (así como de otras dos hipótesis adicionales sobre conjuntos lineales no-medibles y complementos de conjuntos analíticos) respecto a los axiomas típicos de la teoría de conjuntos. En ese mismo año publicó Gödel un anuncio de su descubrimiento. Al año siguiente ofreció una primera y abreviada prueba de la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis del continuo (véase Gödel [1939]), y en 1940 se publicó la prueba más extensa y desarrollada, presentada por Gödel durante un cursillo dado en Princeton (véase Gödel [1940]).

El anuncio de su descubrimiento, recibido el 9 de noviembre de 1938, apareció en 1938 en los *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 24, págs. 556-557, bajo el título *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis* (La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo).

J. M.

LA CONSISTENCIA DEL AXIOMA DE ELECCION Y DE LA HIPOTESIS GENERALIZADA DEL CONTINUO

Teorema. Sea T el sistema de axiomas de teoría de conjuntos obtenido a partir del sistema S^*[1] de von Neumann eliminando el axioma de elección (Ax. III 3*); entonces, si T es consistente sigue siéndolo si se le añaden simultáneamente las sentencias 1-4 como nuevos axiomas:

1. El axioma de elección (es decir, el Ax. III 3* de von Neumann).

2. La hipótesis generalizada del continuo (es decir, la afirmación de que para cada ordinal α: $2_{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$).

3. La existencia de conjuntos lineales no-medibles tales que tanto ellos como sus complementos son proyecciones biunívocas de complementos bidimensionales de conjuntos analíticos (y que por tanto son B_2 –conjuntos en la terminología de Lusin[2]).

4. La existencia de complementos lineales de conjuntos analíticos que poseen la cardinalidad del continuo y no contienen ningún subconjunto perfecto.

---

[1] Véase von Neumann [1929], pág. 227.
[2] Véase N. Lusin [1930], pág. 270.

Un correspondiente teorema vale en el caso de que T denote el sistema de *Principia Mathematica*[3] o el sistema de axiomas de Fraenkel para la teoría de conjuntos[4], eliminando en ambos casos el axioma de elección, pero incluyendo el axioma de infinitud.

La prueba de los anteriores teoremas es constructiva, en el sentido de que si se obtuviese una contradicción en el sistema ampliado también se podría encontrar una contradicción en T.

El método de prueba consiste en construir sobre la base de los axiomas de T[5] un modelo en el que las sentencias 1-4 resulten verdaderas. Este modelo, simplificando, consiste en todos los conjuntos «matemáticamente constructibles», donde el término «constructible» debe ser entendido en el sentido semiintuicionista que excluye procedimientos impredicativos. Esto significa que los conjuntos «constructibles» se definen como los conjuntos obtenibles mediante la jerarquía ramificada de los tipos de Russell si se extiende de modo que incluya órdenes transfinitos. La extensión a órdenes transfinitos tiene como consecuencia que el modelo satisfaga los axiomas impredicativos de la teoría de conjuntos, pues para órdenes suficientemente altos se puede probar un axioma de reducibilidad. Además se puede probar que la sentencia «Todo conjunto es constructible» (que abrevio mediante A) es consistente con los axiomas de T, pues A resulta verdadera en el modelo de los conjuntos constructibles. A partir de A se pueden deducir las sentencias 1-4. En particular la sentencia 2 se sigue del hecho de que todos los conjuntos constructibles de números naturales se han obtenido ya en órdenes $<\omega_1$, todos los conjuntos constructibles de conjuntos de números naturales en órdenes $<\omega_2$, etc.

La sentencia A añadida como nuevo axioma parece que completa de un modo natural los axiomas de la teoría de conjuntos en la medida en que determina de un modo definido la vaga noción de conjunto infinito arbitrario. En conexión con esto es importante que la prueba de consistencia de A no deja de

3 Véase A. Tarski [1933a].

4 Véase A. Fraenkel [1925], pág. 250.

5 Esto significa que el modelo se construye mediante métodos esencialmente transfinitos y por tanto proporciona únicamente una prueba de consistencia relativa, exigiendo como hipótesis la consistencia de T.

valer si se añaden a T axiomas de infinitud más fuertes (como, por ejemplo, la existencia de números inaccesibles). Por ello la consistencia de A parece ser en algún sentido absoluta, aunque no sea posible en el presente estado de cosas asignar un significado preciso a esta afirmación.

Introducción a:
Prueba de consistencia de la hipótesis generalizada del continuo

En 1938 Gödel había anunciado –sin probarlo– su descubrimiento de la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis del continuo respecto a los demás axiomas de la teoría de conjuntos. La primera prueba de este descubrimiento fue recibida en la Academia Nacional de Ciencias el 14 de febrero de 1939. A finales de ese mismo año y principios del siguiente, en una serie de conferencias en Princeton, Gödel ofrecería una segunda prueba, esta vez más desarrollada (véase Gödel [1940]).

Las principales diferencias entre la primera prueba y la segunda son las siguientes: en la primera prueba se toma como base la teoría axiomática de Zermelo (y la de Zermelo-Fraenkel), mientras que en la segunda se utiliza la teoría de von Neumann-Bernays. La primera prueba se lleva a cabo en el metalenguaje, considerando que ciertas clases de fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos son a su vez conjuntos para los cuales valen los axiomas y teoremas. Se afirma, eso sí, que el concepto de «conjunto constructible» podría ser definido dentro de la teoría misma de conjuntos, de modo que la prueba se efectuase en el lenguaje de la teoría, pero de hecho ello sólo se lleva a cabo en la segunda prueba.

La idea fundamental de la prueba aparece en Gödel [1939] con mayor claridad que en Gödel [1940], pues en el primer

escrito es posible definir la jerarquía constructible mediante la sencilla recursión transfinita:

$$M_0 = \{\varnothing\}$$
$$M_{\alpha+1} = M_\alpha^*$$
$$M_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} M_\beta \quad \text{(para límite } \lambda\text{),}$$

donde M_α^* es la clase de los subconjuntos de M_α caracterizables mediante fórmulas de primer orden (con una sola variable libre, cuyas constantes individuales se refieran a elementos de M_α y cuyas variables cuantificadas varíen sobre M_α). Es esencial que se permita que el lenguaje tenga tantas constantes como sean precisas (en cada caso una para cada elemento de M_α). Se dice entonces que un conjunto x es constructible si y sólo si existe un número ordinal α tal que $x \in M_\alpha$.

El axioma de elección vale para los conjuntos constructibles, pues se puede probar, a partir de la mera construcción de la jerarquía, que están bien ordenados. En cuanto a la hipótesis generalizada del continuo, el teorema 2, junto con el teorema de Cantor, permiten probar que vale para los conjuntos constructibles. Los teoremas 3-6 son lemas para la prueba del teorema 2. Por todo ello está claro que, si se añadiese la sentencia A («todo conjunto es constructible»), que más tarde se formulará como $V = L$, a los axiomas de la teoría, tendríamos como teoremas el axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo (teorema 8). Los teoremas 7 y 9 están dedicados a probar la consistencia relativa de A. Para ello se construyen dos modelos, M_{ω_ω} y M_Ω (siendo Ω en este artículo el primer número inaccesible), destinados respectivamente a la teoría de Zermelo y a la de Zermelo-Fraenkel, en los que A es verdadera.

Este artículo apareció en 1939 bajo el título *Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis* (Prueba de consistencia de la hipótesis generalizada del continuo) en los *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 25, págs. 220-224.

J. M.

PRUEBA DE CONSISTENCIA DE LA HIPOTESIS GENERALIZADA DEL CONTINUO[1]

Si M es una clase cualquiera en la que está definida una relación binaria $\in$, entonces llamamos «*fórmula abierta sobre M*» a cualquier fórmula abierta φ que contenga (además de paréntesis) únicamente los siguientes signos: 1. Variables x, y, ..., cuyo ámbito de variabilidad sea M. 2. Signos $a_1, \ldots, a_n$ que denoten[2] elementos individuales de M (que llamaremos «*las constantes de* φ»). 3. $\in$ 4. $\neg$ (no), $\vee$ (o). 5. Cuantificadores para las anteriores variables x, y, ...[3]. M^* denotará el conjunto de todos los subconjuntos de M definibles mediante alguna fórmula abierta $\varphi(x)$ sobre M. Decimos que una función n-ádica f es una «*función en M*» si para cualesquiera elementos $x_1, \ldots, x_n$ de M está definido $f(x_1, \ldots, x_n)$ y es, además, un elemento de M. Si $\varphi(x)$ es una fórmula abierta sobre M con la siguiente forma normal:

---

[1] Este artículo ofrece un esbozo de la prueba de consistencia de las sentencias 1,2 de Gödel [1938] si se identifica T con el sistema de axiomas para la teoría de conjuntos de Zermelo (Zermelo [1908]) con o sin el axioma de sustitución y si la noción de «Definite Eigenschaft» de Zermelo se identifica con «fórmula abierta sobre el sistema de todos los conjuntos». Véase la primera definición del artículo.

[2] Se supone que para cada elemento de M se puede introducir un símbolo que lo denote.

[3] A menos que se diga explícitamente lo contrario, «fórmula abierta» significará «fórmula abierta con una única variable libre».

$$\forall x_1 \cdots x_n \exists y_1 \cdots y_m \forall z_1 \cdots z_k \exists u_1 \cdots u_e \cdots$$

$$\vartheta(x, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_e, \ldots)$$

(donde ϑ no contiene cuantificadores) y $a \in M$, entonces llamamos «*funciones de Skolem para φ y a*» a cualesquiera funciones en M, $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_e, \ldots$, respectivamente, n-ádicas, $n+k$-ádicas, ..., tales que para cada $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k, \ldots$, de M:

$\vartheta(a, x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n), z_1, \ldots, z_k, g_1(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k), \ldots, g_e(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k), \ldots)$.

La sentencia $\varphi(a)$ es entonces equivalente a la existencia de funciones de Skolem para φ y a.

Definimos ahora: $M_0 = \{\emptyset\}$, $M_{\alpha+1} = M_\alpha^*$, $M_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} M_\beta$ para números límite λ. Un conjunto x es «*constructible*» si existe un ordinal α tal que $x \in M_\alpha$, y es «*constructible de orden α*» si $x \in M_{\alpha+1} - M_\alpha$. Se sigue inmediatamente que: *si $\alpha < \beta$, entonces $M_\alpha \subset M_\beta$ y $M_\alpha \in M_\beta$* y que:

Teorema 1. *Para cualesquiera conjuntos constructibles x, y, si $x \in y$, entonces el orden de x es menor que el orden de y.*

Es fácil definir un buen orden de todos los conjuntos constructibles, asociar a cada conjunto constructible (de orden arbitrario α) una única fórmula abierta φ_α sobre M_α como su «*definición*», y asociar además a cada par φ_α, a (que consista en una fórmula abierta φ_α sobre M_α y un elemento a de M_α para el cual $\varphi_\alpha(a)$ sea verdadera) «*funciones de Skolem designadas para φ, a*» unívocamente determinadas[4].

Teorema 2. *Cualquier subconjunto constructible m de M_{ω_μ} tiene un orden $< \omega_{\mu+1}$ (es decir, un conjunto constructible todos cuyos elementos tengan órdenes $< \omega_\mu$ tiene un orden $< \omega_{\mu+1}$).*

Prueba: Defínase un conjunto K de conjuntos constructibles, un conjunto *0* de ordinales y un conjunto F de funciones de Skolem mediante los siguientes postulados I-VII:

I. $M\omega_\mu \subseteq K$ y $m \in K$.

---

[4] Debe asociarse en primer lugar a cada φ_α una forma normal del tipo indicado antes, lo que puede hacerse muy fácilmente.

II. Si $x \in K$, entonces el orden de x pertenece a O.

III. Si $x \in K$, entonces todas las constantes que aparezcan en la definición de x pertenecen a K.

IV. Si $\alpha \in O$ y $\varphi_\alpha(x)$ es una fórmula abierta sobre M_α todas cuyas constantes pertenecen a K, entonces:

1. El subconjunto de M_α definido por φ_α pertenece a K.

2. Para cualquier $y \in K \cap M_\alpha$, las funciones de Skolem designadas para φ_α e y o para $\neg \varphi_\alpha$ e y (según que $\varphi_\alpha(y)$ o $\neg \varphi_\alpha(y)$) pertenecen a F.

V. Si $f \in F$, $x_1, \ldots, x_n \in K$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ pertenece al dominio de f, entonces $f(x_1, \ldots, x_n) \in K$.

VI. Si $x, y \in K$ y $x - y \neq \emptyset$, entonces el primer elemento[5] de $x - y$ pertenece a K.

VII. Ningún subconjunto propio de K, O, F satisface I-VI.

Teorema 3: *Si* $x \neq y$ y $x, y \in K \cap M_{\alpha+1}$, *entonces existe un* $z \in K \cap M_\alpha$ *tal que* $z \in x - y$ o $z \in y - x$[6].
(Se sigue de VI y el teorema 1).

Teorema 4: $|K \cup O \cup F| = \aleph_\mu$[7].
Pues $|M_{\omega_\mu}| = \aleph_\mu$ *y* $K \cup O \cup F$ *se obtiene a partir de* $M_{\omega_\mu} \cup \{m\}$ *formando la clausura respecto a las operaciones expresadas en II-VI.*

Ahora, si denotamos mediante η el tipo de orden de O y mediante $\bar{\alpha}$ al ordinal que corresponde a α en el isomorfismo de O en el conjunto de ordinales $< \eta$, tenemos:

Teorema 5: *Hay una función biyectiva h de K en* M_η *tal que para cada* $x, y \in K$: $x \in y \leftrightarrow h(x) \in h(y)$; *y para cada* $x \in M_{\omega_\mu}$: $h(x) = x$.
Prueba: La función h (que para cada $\alpha \in O$ transforma al conjunto de los elementos de K de orden α en el conjunto de

---

[5] En el buen orden de los conjuntos constructibles.

[6] Los teoremas 3, 4, 5 son lemas para la prueba del teorema 2.

[7] $|m|$ significa «la cardinalidad de m».

todos los conjuntos constructibles de orden $\bar{\alpha}$) se define mediante inducción transfinita sobre el orden, es decir, suponemos que para algún $\alpha \in O$ se ha definido un isomorfismo[8] f de $K \cap M_\alpha$ en $M_{\bar{\alpha}}$[9] y probamos que puede extenderse a un isomorfismo g de $K \cap M_{\alpha+1}$ en $M_{\bar{\alpha}+1}$[10] del siguiente modo: en primer lugar puede establecerse una función biyectiva entre el conjunto de las fórmulas abiertas sobre M_α cuyas constantes pertenezcan a K (y por tanto a $K \cap M_\alpha$) y el conjunto de las fórmulas abiertas sobre $M_{\bar{\alpha}}$ asociando a cada fórmula abierta φ_α sobre M_α que tenga las constantes $a_1, \dots, a_n$ la fórmula abierta $\varphi_{\bar{\alpha}}$ sobre $M_{\bar{\alpha}}$ obtenida a partir de φ reemplazando a_i por a'_i y los cuantificadores con ámbito de variabilidad M_α por cuantificadores con ámbito $M_{\bar{\alpha}}$. Tenemos entonces:

Teorema 6: *Para cada* $x \in K \cap M_\alpha$, $\varphi_\alpha(x) \leftrightarrow \varphi_{\bar{\alpha}}(x')$.

Prueba: Si $\varphi_\alpha(x)$ es verdadera, entonces existen las funciones de Skolem designadas para φ_α y x, pertenecen a F (por IV, 2), y son funciones en $K \cap M_\alpha$ (por V). Por ello la función f las transforma en funciones en $M_{\bar{\alpha}}$ que son funciones de Skolem para $\varphi_{\bar{\alpha}}$ y x', porque la función f es un isomorfismo respecto a $\in$. De aquí que $\varphi_\alpha(x) \rightarrow \varphi_{\bar{\alpha}}(x')$.

Del mismo modo se prueba que $\neg\varphi_\alpha(x) \rightarrow \neg\varphi_{\bar{\alpha}}(x')$.

Ahora cualquier φ_α sobre M_α todas cuyas constantes pertenezcan a K define, por IV,1, un elemento de $K \cap M_{\alpha+1}$, y cualquier elemento b de $K \cap M_{\alpha+1}$ puede definirse mediante una tal φ_α (si $b \in M_{\alpha+1} - M_\alpha$ esto se sigue de III, y si $b \in M_\alpha$, entonces «$x \in b$» es esta φ_α). Por tanto, la anterior función de las φ_α en las $\varphi_{\bar{\alpha}}$ proporciona una correspondencia g entre $K \cap M_{\alpha+1}$ y $M_{\bar{\alpha}+1}$ con las siguientes propiedades:

A. *g es unívoca,* porque si φ_α, ψ_α definen el mismo conjunto, entonces tenemos que, para $x \in M_\alpha \cap K$, $\varphi_\alpha(x) \leftrightarrow \psi_\alpha(x)$, y por tanto $\varphi_{\bar{\alpha}}(x') \leftrightarrow \psi_{\bar{\alpha}}(x')$, por el teorema 6, es decir, $\varphi_{\bar{\alpha}}$ y $\psi_{\bar{\alpha}}$ definen el mismo conjunto.

---

[8] Es decir, $x \in y \leftrightarrow f(x) \in f(y)$. En lo siguiente, $f(x)$ se abrevia por x'.

[9] Es decir, de los elementos de orden $< \alpha$ de K en los elementos de orden $< \bar{\alpha}$ de M_η.

[10] Es decir, de los elementos de orden $\leqslant \alpha$ de K en los elementos de orden $\leqslant \bar{\alpha}$ de M_η.

B. *Para* $x \in K \cap M_\alpha$, $y \in K \cap M_{\alpha+1}$: $x \in y \leftrightarrow x' \in g(y)$ (Por el teorema 6).

C. *g es biunívoca*, porque si x, $y \in K \cap M_{\alpha+1}$ y $x \neq y$, entonces, por el teorema 3, hay un $z \in (x-y) \cup (y-x)$ tal que $z \in K \cap M_\alpha$, y por tanto $z' \in (g(x)-g(y)) \cup (g(y)-g(x))$, por B. De aquí que $g(x) \neq g(y)$.

D. *g es una extensión de la función f*, es decir, $g(x)=x'$ para cada $x \in K \cap M_\alpha$.

Prueba: Para cualquier $b \in K \cap M_\alpha$, $x \in b$ es una correspondiente φ_α que lo define, y por tanto $\varphi_{\bar{\alpha}}$ es $x \in b'$, de donde $g(b)=b'$.

E. *g transforma* $K \cap M_\alpha$ *exactamente en* $M_{\bar{\alpha}}$ *(por D)*[11], *y por tanto transforma* $K \cap (M_{\alpha+1} - M_\alpha)$ *en* $M_{\bar{\alpha}+1} - M_{\bar{\alpha}}$, *gracias a C.*

F. *g es un isomorfismo respecto a* $\in$, *es decir, para cualesquiera* x, $y \in K \cap M_{\alpha+1}$: $g(x) \in g(y) \leftrightarrow x \in y$.

Prueba: Si $x \in K \cap M_\alpha$, esto se sigue de B y D, y si $x \in K \cap M_{\alpha+1} - M_\alpha)$, entonces, por E, $g(x) \in M_{\alpha+1} - M_\alpha$, de modo que, por el teorema 1, ambos lados de la equivalencia son falsos.

Gracias a D y F, g es la extensión de f que buscábamos, de modo que se sigue por inducción completa la existencia de un isomorfismo h de K en M_η. Además, como (por I, II) todos los ordinales $< \omega_\mu$ pertenecen a O, tenemos que, para $\beta < \omega_\mu$, $\bar{\beta} = \beta$, de lo cual se sigue fácilmente que, para $x \in M_{\omega_\mu}$, $x = h(x)$. Esto finaliza la prueba del teorema 5.

En vistas a probar el teorema 2, considérese el conjunto $h(m)$ correspondiente a m en el isomorfismo de K en M_η. Su orden es $< \eta < \omega_{\mu+1}$, porque $h(m) \in M_\eta$ y $|\eta| = |O| \leqslant \aleph_\mu$ por el teorema 4. Como para $x \in K$, $x \in m \leftrightarrow h(x) \in h(m)$ tenemos por el teorema 5 que, para $x \in M_{\omega_\mu}$, $x \in m \leftrightarrow x \in h(m)$. Como además $m \subseteq M_{\omega_\mu}$, se sigue que $m = h(m) \cap M_{\omega_\mu}$, es decir, que m es la intersección de dos conjuntos de orden $< \omega_{\mu+1}$, lo que trivialmente implica que tiene un orden $< \omega_{\mu+1}$.

---

[11] Porque f es, por el supuesto inductivo, una función exhaustiva de $K \cap M_\alpha$ en $M_{\bar{\alpha}}$.

Teorema 7: M_{ω_ω}, *considerado como un modelo de la teoría de conjuntos, satisface todos los axiomas de Zermelo*[12], *excepto quizá el axioma de elección, y* M_Ω *(siendo* Ω *el primer número inaccesible) satisface además el axioma de la sustitución si en ambos casos «definite Eigenschaft» y «definite Relation» se identifican con «fórmula abierta sobre la clase de todos los conjuntos» (respectivamente, con una y dos variables libres).*

Esbozo de la prueba para M_{ω_ω}: los axiomas I y II son triviales, el axioma VII se satisface para $Z = M_\omega$, y los axiomas III-V tienen la forma $\exists x \forall u(u \in x \leftrightarrow \varphi(u))$, donde las φ son ciertas fórmulas abiertas sobre M_{ω_ω}. Entonces, por la definición de $M_{\alpha+1}$, existen conjuntos x en $M_{\omega_\omega+1}$ que satisfacen los axiomas. Pero de los teoremas 1 y 2 se sigue fácilmente que el orden de x es menor que ω_ω para las particulares φ en consideración, de modo que existen conjuntos x en el modelo que satisfacen los axiomas.

Para M_Ω, los axiomas I-V y VII se prueban exactamente del mismo modo, y el axioma de la sustitución se prueba por el mismo método que los axiomas III-V. Ahora sea A la sentencia «no existen conjuntos no constructibles»[13], R el axioma de elección y C la sentencia «para cualquier ordinal α $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$». Tenemos entonces:

Teorema 8: $A \to R$ y $A \to C$.

$A \to R$ se sigue del hecho de que se puede definir un buen orden de todos los conjuntos constructibles, y $A \to C$ se sigue del teorema 2, porque $|M_{\omega_\alpha}| = \aleph_\alpha$.

En los mismos sistemas formales de teoría de conjuntos se puede definir la noción de «conjunto constructible» y desarrollar su teoría. En especial se pueden probar los teoremas 2 y 8 a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos. Denotemos la noción de «conjunto constructible» relativizada a un modelo M de la teoría de conjuntos (es decir, definido en términos de la

[12] Véase Zermelo [1908].

[13] Para dar un significado intuitivo a A debe entenderse por «conjunto» cualquier objeto obtenible al construir la jerarquía simple de los tipos a partir de un conjunto vacío de individuos (incluyendo tipos de órdenes transfinitos arbitrarios).

relación $\in$ del modelo) mediante *constructible*$_M$. Tenemos entonces:

Teorema 9: *Cualquier elemento de* M_{ω_ω} *(respectivamente* M_Ω*) es constructible*$_{M_{\omega_\omega}}$ *(respectivamente constructible*$_{M_\Omega}$*)*; en otras palabras: *A es verdadera en los modelos* M_{ω_ω} *y* M_Ω.

La prueba está basada en los dos siguientes hechos: 1. La operación M^* (definida en la página 197) es absoluta, en el sentido de que la operación relativizada al modelo M_{ω_ω} y aplicada a un $x \in M_{\omega_\omega}$ da el mismo resultado que la operación original (similarmente para M_Ω). 2. El conjunto N_α que tiene como elementos a todos los M_β (para $\beta < \alpha$) es constructible$_{M_{\omega_\omega}}$ para cualquier $\alpha < \omega_\omega$ y constructible M_Ω para cualquier $\alpha < \Omega$, como se puede ver fácilmente por inducción sobre α. Del teorema 9 y de la deducibilidad (a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos) del teorema 8 se sigue que:

Teorema 10: *R y C resultan verdaderas en los modelos* M_{ω_ω} *y* M_Ω.

La construcción de M_{ω_ω} y de M_Ω y la prueba de los teoremas 7 y 9 (y por tanto también del teorema 10) puede efectuarse (tras ciertas ligeras modificaciones)[14] en los respectivos sistemas formales de la teoría de conjuntos (sin el axioma de elección) de modo que una contradicción deducida de *C*, *R*, *A* y los otros axiomas conduciría a una contradicción obtenible en la teoría de conjuntos sin *C*, *R*, *A*.

[14] En especial para el sistema sin el axioma de la sustitución tenemos que considerar en vez de M_{ω_ω} una imagen isomórfica suya (con alguna otra relación *R* en vez de la relación $\in$), porque M_{ω_ω} contiene conjuntos de tipo infinito cuya existencia no se puede probar sin el axioma de la sustitución. El mismo ingenio se precisa para probar la consistencia de las sentencias 3, 4 del artículo citado en la nota 1.

Introducción a:
La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos

Dos conjuntos tienen el mismo número (cardinal) de elementos si, y sólo si, son biyectables entre sí, es decir, si existe una biyección o correspondencia biunívoca entre sus elementos. Designemos mediante |A| el número cardinal (o cardinalidad) de A. A y B tienen la misma cardinalidad, es decir, $|A|=|B|$, si existe una biyección entre A y B. A tiene menos cardinalidad que B, es decir, $|A|<|B|$, si existe una biyección entre A y un subconjunto propio de B, pero no entre A y B. Cantor extendió el concepto de número cardinal a los conjuntos infinitos. Desde luego, dados dos conjuntos finitos, A y B, sus correspondientes números cardinales siempre son comparables, es decir, si $|A|=n$ y $|B|=m$, entonces $n<m$ o $n=m$ o $m<n$. Cantor pensaba que lo mismo pasaba con los conjuntos infinitos, creía que cualesquiera dos cardinales son comparables, es decir, que para cada dos conjuntos (finitos o infinitos) A y B, siempre ocurre que $|A|<|B|$ o $|A|=|B|$ o $|B|<|A|$. Esto parece evidente, pero Cantor no logró probarlo.

E. Zermelo axiomatizó por primera vez la teoría de conjuntos. Los axiomas que puso al frente de la teoría enuncian diversas propiedades que los conjuntos –intuitivamente considerados– poseen. Así, por ejemplo, el axioma de extensionalidad dice que si dos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos, entonces son el mismo conjunto; el axioma del par dice

que para cada dos conjuntos x e y existe el conjunto $\{x, y\}$ que tiene como elementos precisamente a x e y, etc. Cuando Zermelo trató de probar que dos cardinales cualesquiera son comparables, se vio obligado a introducir un nuevo principio en la teoría de conjuntos: el *axioma de elección*, que dice que siempre que tenemos una colección de conjuntos no vacíos existe una función que elige un elemento de cada uno de esos conjuntos. Del axioma de elección se sigue no sólo la comparabilidad de dos cardinales cualesquiera, sino muchos otros teoremas intuitivamente claros, tanto de la teoría de conjuntos como de otras teorías matemáticas. Pero aunque la mayoría de los matemáticos aceptaban como evidente el axioma de elección, algunos manifestaban sus dudas e incluso sus inquietudes ante la posibilidad de que al socaire de este axioma se introdujeran contradicciones en la matemática clásica. Gödel probó en 1938 que estas dudas e inquietudes no estaban justificadas. Si los otros axiomas son consistentes, es imposible que el añadido del axioma de elección introduzca contradicción alguna en la teoría.

Así como los números cardinales 0, 1, 2, 3, etc., miden la cardinalidad de los conjuntos finitos, así también los números cardinales $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, etc., miden la cardinalidad de los conjuntos infinitos. $\aleph_0$ es precisamente la cardinalidad del conjunto de los números naturales (o de cualquier otro conjunto denumerable). La cardinalidad del conjunto de los números reales (o la de las partes del conjunto de los naturales, o la de los puntos de un continuo n-dimensional: línea, plano, etc.) es $2^{\aleph_0}$. La cardinalidad inmediatamente mayor que $\aleph_0$ es $\aleph_1$. Cantor conjeturó que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, es decir, que no hay cardinalidades intermedias entre la del conjunto de los números naturales y la del continuo, es decir, que cualquier conjunto infinito de números reales o es denumerable o tiene ya la cardinalidad del continuo. Esta conjetura cantoriana se llama la hipótesis especial del continuo. La *hipótesis generalizada del continuo* dice que, en general, no hay ninguna cardinalidad intermedia entre la de un conjunto infinito dado A, $|A| = \aleph_\alpha$, y la del conjunto de sus partes, $|\mathscr{P}A| = 2^{\aleph_\alpha}$. Cantor había probado que $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$, para cada ordinal α. Por tanto, $2^{\aleph_\alpha}$ es distinto de $\aleph_\alpha$. La hipótesis generalizada del continuo dice que $2^{\aleph_\alpha}$ es la cardinalidad siguiente a $\aleph_\alpha$, es decir, que para cada ordinal α: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Cantor había enunciado la hipótesis del continuo en 1878. Pero ni él ni nadie había logrado probarla, a pesar de que Hilbert había colocado el problema del continuo (es decir, demostrar o refutar la hipótesis del continuo) en el primer lugar de su famosa lista de 23 problemas por resolver presentados al congreso mundial de matemáticos de 1900. En 1938 Gödel probó que la hipótesis del continuo no puede refutarse, es decir, que su negación no se sigue de los otros axiomas de la teoría de conjuntos, a los que puede añadirse sin producir contradicción ninguna, a no ser que aquéllos ya fuesen contradictorios de por sí.

En la teoría de conjuntos tenemos que cuantificar con frecuencia sobre todos los conjuntos. Pero no tenemos una intuición suficientemente clara del universo de la teoría de conjuntos. Sabemos lo que son los números naturales y tenemos, por tanto, una visión relativamente clara del universo de la aritmética. Los números naturales son el 0, el siguiente del 0, el siguiente del siguiente del 0, y, en general, el resultado de iterar un número finito de veces, a partir del 0, la operación «siguiente de». Pero ¿qué son los conjuntos? En 1929 John von Neumann propuso considerar que los conjuntos son los resultados de iterar un número cualquiera (también infinito) de veces, a partir del conjunto vacío, las operaciones «conjunto de las partes de» y «gran unión de». Esto nos proporciona una cierta intuición de la constitución del universo de la teoría de conjuntos. Según esta concepción, el universo de la teoría de conjuntos estaría estratificado de un modo jerárquico y acumulativo: jerárquico, porque cada conjunto tendría un cierto rango, se situaría a cierto nivel; acumulativo, porque cada nivel abarcaría a todos los anteriores. Von Neumann definió por recursión sobre los ordinales una función R del siguiente modo:

$$R\,(0) = \varnothing$$

$$R\,(\alpha+1) = \mathcal{P}\,R\,(\alpha)$$

$$R\,(\lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} R\,(\beta)$$

R procede paso a paso, ordinal a ordinal. En cada paso se obtiene una nueva capa o estrato de conjuntos. Puesto que los estratos son acumulativos, si un conjunto se encuentra en uno de

ellos, $R(\alpha)$, también se encuentra en todos los $R(\beta)$, con $\alpha<\beta$. Pero siempre hay un mínimo α, tal que el conjunto dado se encuentra en $R(\alpha)$. Ese ordinal α constituye el rango del conjunto.

Un conjunto es regular si se encuentra en uno de esos estratos de la jerarquía acumulativa, es decir, el conjunto x es regular si y sólo si hay un ordinal α, tal que $x \in R(\alpha)$.

Von Neumann propuso identificar el universo de la teoría de conjuntos con la jerarquía acumulativa, es decir, propuso el axioma de regularidad (o fundación), que dice que cada conjunto es regular, que cada conjunto se encuentra en uno de los estratos definidos por R. Además, von Neumann probó la consistencia relativa del axioma de regularidad respecto al resto de los axiomas de la teoría de conjuntos, construyendo un modelo interno. Sea T la teoría de conjuntos sin axioma de regularidad. Si es consistente, posee un modelo $<V, E>$, donde V es el universo de los conjuntos, y E la relación $\in$ entre objetos de V. Sea R el subconjunto de V de los objetos regulares de V, es decir, de los conjuntos regulares. Sea $E|R$ la restricción de $\in$ a objetos de E. Von Neumann probó que el submodelo $<R, E|R>$ satisface tanto a los axiomas anteriores de T como al axioma de regularidad. Por consiguiente, si T es consistente, T+axioma de regularidad es también consistente.

El procedimiento de prueba de consistencia relativa mediante la construcción de un modelo interno sería aplicado diez años más tarde con insólito rigor por Gödel para probar la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis del continuo. Esta prueba, ya anunciada por Gödel poco antes en una nota (véase Gödel [1938]) aparecida en los *Proceedings of the National Academy of Sciences*, fue expuesta por primera vez de un modo detallado en un cursillo sobre el tema desarrollado por Gödel en el semestre de otoño-invierno 1938-39 en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. George W. Brown fue encargado de tomar los apuntes del cursillo, apuntes publicados luego como libro, dividido en ocho capítulos.

El *capítulo primero* presenta los axiomas de la teoría de conjuntos que se va a investigar. Aunque la axiomatización más antigua y difundida de la teoría de conjuntos es la de Zermelo-Fraenkel, Gödel incorpora a la suya dos rasgos esenciales de la

de von Neumann: la distinción entre clases y conjuntos (todo conjunto es una clase, pero una clase sólo es un conjunto si es a su vez elemento de otra clase) y el axioma de regularidad, así como la axiomatización finita (es decir, la evitación de esquemas axiomáticos), debida a Bernays. Las ideas de von Neumann fueron expuestas y desarrolladas con más detalle por Bernays, y luego adoptadas y precisadas por Gödel. Por eso la axiomatización resultante suele conocerse con el nombre de von Neumann-Bernays-Gödel, abreviadamente NBG.

El *capítulo segundo* empieza por probar como teorema el esquema de existencia de clases que en otras axiomatizaciones se toma como axioma, es decir, la afirmación de que para cada fórmula $\varphi(x)$ (que sea normal, en su terminología, es decir, entre otras cosas, que sus variables cuantificadas se refieran todas a conjuntos) existe una clase A, tal que para cada conjunto x, $x \in A$ si y sólo si $\varphi(x)$. $\exists A \forall x \, (x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$ es un esquema, es decir, una manera de expresar comprimidamente infinitos teoremas distintos, tantos como distintas fórmulas $\varphi(x)$ hay que cumplen la condición citada. Gödel prueba este teorema –en la forma $\exists A \forall x_1 \dots x_n \, (< x_1, \dots, x_n > \in A \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n))$– a partir de los ocho axiomas –fórmulas concretas– del grupo B expuestos en el capítulo anterior. El resto del capítulo expone someramente las definiciones y teoremas elementales típicos.

El *capítulo tercero* trata de los números ordinales, introducidos a la manera de von Neumann, según la cual cada número ordinal es el conjunto de todos sus predecesores y está bien ordenado por la relación $\in$. Así, el $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, etc. Además expone el teorema de recursión transfinita, que nos permite definir funciones de números ordinales.

El *capítulo cuarto* trata de los números cardinales. El cardinal de un conjunto dado se identifica con el mínimo ordinal con el que ese conjunto es biyectable.

En el *capítulo quinto*, finalmente, llegamos al cogollo del asunto, construyendo el famoso modelo interno de los conjuntos constructibles. Recordemos la función R de von Neumann:

$$R\,(0) = \varnothing$$
$$R\,(\alpha+1) = \mathscr{P}\,R\,(\alpha)$$
$$R\,(\lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} R\,(\beta)$$

Puesto que el axioma de regularidad está incorporado a la axiomatización de Gödel, el universo de su teoría de conjuntos abarca precisamente los conjuntos regulares. Observemos más de cerca la definición de R y, en especial, su segunda línea. Nos dice que $R\ (\alpha+1)=\mathscr{P}\ R\ (\alpha)$, es decir, que con cada nuevo ordinal damos el paso del conjunto $R\ (\alpha)$ al conjunto de las partes de $R\ (\alpha)$. Se trata de un paso gigantesco (como el del conjunto de los números naturales al continuo). En efecto, qué sea el conjunto de las partes de un conjunto infinito dado es algo de lo que no tenemos una intuición suficientemente clara. No sabemos cómo construir todas las partes de un conjunto infinito. ¿No sería posible sustituir esa segunda línea por otra que nos permitiera pasar de un conjunto dado, no al conjunto de todas sus partes, sino sólo al conjunto de aquellas de sus partes que sepamos cómo definir o construir? Supongamos que tuviéramos una operación Df que, aplicada a un conjunto cualquiera, nos diese el conjunto de aquellas de sus partes que pudiéramos definir o construir, y sólo éstas. Entonces podríamos definir otra función L, parecida a R, pero más modesta y comprensible.

$$L(0)=\varnothing$$
$$L(\alpha+1)=Df\ L(\alpha)$$
$$L(\lambda)=\bigcup_{\beta<\lambda} L(\beta)$$

Entonces podríamos llamar constructible a un conjunto x si y sólo si hubiera un ordinal α, tal que $x \in L\ (\alpha)$. La tesis de constructibilidad diría entonces que todo conjunto es constructible.

En realidad, Gödel no define la operación Df de la que hemos hablado, sino que hace algo equivalente. Todas las clases que se pueden construir en su teoría de conjuntos se pueden formar por aplicaciones sucesivas de los ocho axiomas del grupo B, correspondientes al esquema de existencia de clases. Gödel define ocho operaciones binarias, $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots, \mathscr{F}_8$, correspondientes a esos ocho axiomas. Luego establece una biyección J entre el conjunto $9 \times \Omega \times \Omega$ de todos los triplos $<i, \alpha, \beta>$ (donde $0 \leqslant i \leqslant 8$; $\alpha, \beta \in \Omega$) y el conjunto Ω de todos los ordinales. Finalmente define una función F para todos los ordinales del siguiente modo. Puesto

que a cada ordinal γ corresponde (mediante J) un cierto triplo $<i, \alpha, \beta>$ (donde $0 \leqslant i \leqslant 8$; $\alpha, \beta \in \Omega$), basta con definir $F(\gamma)$ en función de ese triplo $<i, \alpha, \beta>$, lo cual puede hacerse así: si $1 \leqslant i \leqslant 8$, entonces $F(\gamma) = \mathscr{F}_i (F(\alpha), F(\beta))$ –con esto formamos todos los conjuntos definibles a partir de conjuntos ya construidos–; si $i=0$, entonces $F(\gamma) = \{F(\delta) \mid \delta < \gamma\}$ –con esto reunimos todos los conjuntos construidos hasta un cierto momento en un solo conjunto–. Para terminar, Gödel define la clase L de los conjuntos construibles como la clase de todos los conjuntos que resultan de F, es decir, $L = \{F(\alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$.

Una clase es constructible si todos sus elementos son constructibles y si su intersección con cualquier conjunto constructible es un conjunto constructible. Esto le permite construir el modelo constructible Δ. Supongamos que la teoría de conjuntos Σ que Gödel ha axiomatizado en el primer capítulo sea consistente. Entonces posee un modelo $<C, U, E>$, donde C es el universo de las clases, U, el de los conjuntos (por tanto $U \subset C$) y E, la relación $\in$ entre clases.

$\Delta = <C', L, E'>$, donde C' es el universo de las clases constructibles y E' la relación $\in$, restringida a clases constructibles. Δ es un modelo interno de la teoría de conjuntos, el modelo constructible.

En el *capítulo sexto* se prueba que el modelo constructible Δ satisface todos los axiomas de la teoría de conjuntos Σ, lo cual se demuestra mostrando que las relativizaciones a L de todos los axiomas de Σ son teoremas deducibles de Σ. Relativizar una afirmación sobre conjuntos significa restringirla a los conjuntos constructibles, es decir, sustituir $\forall x\ \varphi(x)$ por $\forall x(x \in L \rightarrow \varphi(x))$ y $\exists x\ \varphi(x)$ por $\exists x(x \in L \wedge \varphi(x))$.

La tesis de la constructibilidad es la tesis que dice que todos los conjuntos son constructibles, es decir, que $V=L$. Nadie pretende que la tesis de constructibilidad valga en general para todos los conjuntos, pues ello no corresponde a nuestras intuiciones sobre los conjuntos. Pero en el *capítulo séptimo* Gödel prueba que la tesis de constructibilidad, $V=L$, vale para el modelo constructible Δ. Δ no es sólo un modelo de Σ, como se mostró en el capítulo anterior, sino también de $\Sigma \cup \{V=L\}$. Con esto queda probada la consistencia relativa de $V=L$ respecto a Σ.

En el *capítulo octavo*, finalmente, prueba Gödel que de $\Sigma \cup \{V = L\}$ se siguen como consecuencias tanto el axioma de elección como la hipótesis generalizada del continuo. Por tanto, cualquier modelo de $\Sigma \cup \{V=L\}$ será también un modelo del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo. En resumen, si la teoría de conjuntos (sin tesis de constructibilidad, sin axioma de elección y sin hipótesis generalizada del continuo) es consistente, entonces tiene un modelo standard, un submodelo del cual es el modelo constructible, que además de a Σ, satisface también a la tesis de constructibilidad, al axioma de elección y a la hipótesis generalizada del continuo, cuya consistencia relativa respecto a Σ queda así demostrada.

En 1938-39 probó Gödel que el axioma de elección y la hipótesis del continuo son consistentes relativamente a (es decir, compatibles con) los otros axiomas de la teoría de conjuntos. En 1963 probó Paul Cohen que la negación del axioma de elección y la negación de la hipótesis del continuo son también consistentes relativamente a (es decir, compatibles con) los otros axiomas de la teoría de conjuntos. Entre Gödel y Cohen probaron, pues, que tanto el axioma de elección como la hipótesis del continuo son independientes de los demás axiomas. De todos modos el status de ambas tesis es bien distinto. El axioma de elección está generalmente aceptado, mientras que la hipótesis del continuo nunca es utilizada como axioma e incluso el mismo Gödel sospechaba su falsedad. Ocho años más tarde, en 1947, Gödel expuso sus reflexiones filosóficas sobre la situación en que quedaban los axiomas de la teoría de conjuntos en su artículo «¿Qué es el problema del continuo de Cantor?» (pág. 340 de este libro).

Los apuntes que George W. Brown tomó del cursillo de Gödel fueron publicados en forma de libro por Princeton University Press (Princeton, New Jersey) en 1940 en la serie Annals of Mathematical Studies, bajo el título *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory* (La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos). La obra ha sido reimpresa varias veces. En estas posteriores reimpresiones se han ido corrigiendo erratas y pequeños errores y añadiendo alguna nota.

En 1965 Gödel añadió un suplemento que tiene en cuenta los resultados recientemente obtenidos. Todas esas correcciones y notas, así como el suplemento de 1965, quedan incorporadas a nuestra traducción.

J. M.

LA CONSISTENCIA DEL AXIOMA DE ELECCION Y DE LA HIPOTESIS GENERALIZADA DEL CONTINUO CON LOS AXIOMAS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

Introducción

En estas conferencias se probará que si los axiomas de la teoría de conjuntos son consistentes, también lo es el resultado de agregarles el axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo de Cantor (es decir, la sentencia que afirma que para todo α: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$). El sistema Σ de axiomas de teoría de conjuntos que aquí se adopta incluye el axioma del reemplazo (véase Fraenkel [1927], pág. 115) y el axioma de «Fundierung» (véase Zermelo [1930], pág. 31), pero no, por supuesto, el axioma de elección. Este sistema se debe esencialmente a P. Bernays (véase Bernays [1937-43], 2, pág. 65), y si se excluye el axioma de elección o, para ser más exactos, se reemplaza el axioma III3* por el axioma III3, es equivalente al sistema S* + VI de v. Neumann (véase v. Neumann [1929]). Lo que aquí se probará es que si fuese posible deducir en Σ una contradicción a partir del axioma de elección o de la hipótesis generalizada del continuo, ésta podría ser transformada en una contradicción obtenida únicamente de los axiomas de Σ. Este resultado se consigue construyendo dentro de Σ (es decir, utilizando sólo los signos primitivos y los axiomas de Σ) un modelo Δ para la teoría de conjuntos con las siguientes propiedades: 1) las sentencias que afirman que los

axiomas de Σ valen para Δ son teoremas deducibles en Σ; 2) las sentencias que afirman que el axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo valen para Δ son asimismo deducibles en Σ. De hecho se puede demostrar que vale para Δ otra sentencia[1] mucho más fuerte que tiene ciertas consecuencias interesantes que van más allá del axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo (véase la pág. 269).

Para poder definir Δ y probar sus citadas propiedades a partir de los axiomas de Σ es necesario desarrollar previamente una parte de la teoría abstracta de conjuntos a partir de los axiomas de Σ. Esto se hace en los capítulos II-IV. Aunque las definiciones y los teoremas están expuestos en su mayor parte en símbolos lógicos, la teoría que aquí se desarrolla no debe ser considerada como un sistema formal, sino como una teoría axiomática en la que se presupone que son conocidos el significado y las propiedades de los símbolos lógicos. Es claro, sin embargo, para cualquiera que esté familiarizado con la lógica matemática, que las pruebas pueden ser formalizadas usando únicamente las reglas del «Engerer Funktionenkalkül» (lógica de primer orden) de Hilbert. En varios lugares (en particular para el «teorema general de existencia», en la página 223, y para las nociones de «relativización» y «absolutidad», en la página 264) haremos consideraciones metamatemáticas sobre las nociones y

---

[1] ⟦Nota añadida en la segunda edición⟧. En particular, esta sentencia más fuerte implica que existe un buen orden *proyectivo* de los números reales (para ser más exactos, un buen orden cuyo correspondiente conjunto de pares es un conjunto PCA en el plano). Esto se sigue de considerar aquellos pares *s*, *e* de relaciones entre números naturales que para algún $\gamma<\omega_1$ son isomorfos al par de relaciones $<$, $\{<\alpha\beta> / F(\alpha)\in F(\beta)\}$ restringidas a γ. La clase *M* de estos pares *s*, *e* también puede ser definida directamente (es decir, sin referencia a la *F* previamente definida), exigiendo que I) *s* sea una relación de buen orden para los números naturales, y II) *e* satisfaga ciertos postulados recursivos respecto al buen orden *s*, que son exactamente análogos a los postulados que definen a *F* (véase la Df. 9.3). La definición de *M*, realizada de este modo, contiene únicamente *cuantificación sobre números naturales y conjuntos de números naturales* (es decir, números reales), lo cual asegura el carácter proyectivo del objeto definido y posibilita determinar su orden proyectivo contando los «cambios de signo» de los cuantificadores de números reales que aparezcan. Puede entonces ser definido en términos de *M* un buen orden proyectivo de los números reales (del orden mencionado). Como consecuencia de este estado de cosas, véase A. Kuratowski [1949].

sentencias del sistema Σ. El único propósito, sin embargo, de estas consideraciones metamatemáticas generales es mostrar cómo las pruebas de teoremas de cierto tipo pueden ser efectuadas por medio de un método general. Y como para probar las propiedades 1) y 2) del modelo Δ es necesario considerar únicamente un número finito de casos, las consideraciones metamatemáticas generales pueden ser suprimidas si uno se toma la molestia de realizar las pruebas independientemente en cada caso[2].

En la primera parte introductoria a la teoría de conjuntos en general (es decir, en los capítulos II-IV) no todas las pruebas han sido realizadas en detalle, pues muchas de ellas pueden ser transferidas literalmente de la teoría no-axiomática de conjuntos, y además J. v. Neumann (en v. Neumann [1928]) ha dado un tratamiento axiomático de ellas sobre una base similar.

Para las nociones lógicas utilizamos los siguientes símbolos: $\forall x$, $\exists x$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $=$, $\exists ! X$, que significan, respectivamente: para todo X, hay un X, no, y, o, si... entonces, si y sólo si, es igual a, hay un único X. $X = Y$ significa que X e Y son el mismo objeto. «Para todo X» se expresa también en definiciones y teoremas mediante variables libres.

El sistema Σ tiene, además de la relación $\in$, dos nociones primitivas, a saber, «clase» y «conjunto». Las clases son lo que en la formulación de Zermelo (véase Zermelo [1908]) aparecen como propiedades definidas («definite Eigenschaften»). Sin embargo, en el sistema Σ, a diferencia del de Zermelo, se afirma explícitamente por medio de un grupo especial de axiomas (grupo B en la pág. 219) cómo van a ser construidas las propiedades definidas. Las clases representan al mismo tiempo relaciones entre conjuntos, a saber, una clase A representa la relación que se da entre x e y si el par ordenado $\langle x, y \rangle$ (definido en 1.12) es un elemento de A. La misma relación $\in$ se utiliza entre conjuntos y conjuntos y conjuntos y clases. El axioma de extensionalidad (el Bestimmtheitsaxiom de Fraenkel) se aplica del mismo modo a conjuntos y clases, y una clase se

---

[2] En particular, también las inducciones completas usadas en las pruebas de los teoremas 1.16, M1, M2, únicamente necesitan extenderse hasta cierto número natural, a saber, 20.

identifica con el conjunto, si existe, que tenga los mismos elementos que ella, de modo que todo conjunto es una clase[3]. Por otro lado, en virtud del axioma A.2, una clase B que no sea un conjunto (e.g la clase universal) nunca puede ser un elemento, es decir, siempre es falso (aunque no carente de sentido) decir que $B \in X$.

1. Los axiomas de la teoría abstracta de conjuntos

Nuestras nociones primitivas son: *clase*, denotada por **Cls**; *conjunto*, denotada por $\mathscr{C}$; y la *relación diádica* $\in$ entre clase y clase, clase y conjunto, conjunto y clase, o conjunto y conjunto. Las nociones primitivas aparecen en contexto como sigue:

Cls A, A es una clase
$\mathscr{C}A$, A es un conjunto
$X \in Y$, $X \in y$, $x \in Y$, $x \in y$,

bajo la convención de que X, Y, Z, ..., son variables cuyo ámbito de variabilidad abarca todas las clases, y de que x, y, z, ..., son variables cuyo ámbito lo constituyen todos los conjuntos.

Los axiomas se distribuyen en cuatro grupos: A, B, C, D.

Grupo A:

1. **Cls** x
2. $X \in Y \rightarrow \mathscr{C}X$
3. $\forall u\ (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y$
4. $\forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$

El axioma 1 del grupo expuesto afirma que todo conjunto es una clase. Una clase que no sea un conjunto se llama *clase propia*, esto es:

1. Df. **Pr** $X \leftrightarrow \neg \mathscr{C}X$

El axioma 2 dice que toda clase que sea miembro de alguna otra clase es un conjunto. El axioma 3 es el principio de

---

[3] Similarmente, v. Neumann en v. Neumann [1928].

extensionalidad, que postula que dos clases son iguales cuando tienen los mismos elementos. El axioma 4 asegura la existencia del conjunto cuyos únicos miembros son x e y para cualesquiera conjuntos x e y. Además, para unos x e y dados, este conjunto, en virtud del axioma 3, está definido unívocamente. El elemento z definido por 4 se llama el *par desordenado* de x e y, y se denota mediante $\{x, y\}$, esto es:

1.1. Df. $u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y$

1.11. Df. $\{x\} = \{x, x\}$

$\{x\}$ es el conjunto cuyo único elemento es x.

1.12. Df. $<x, y> = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

$<x, y>$ es el par ordenado de x e y. Obtenemos el siguiente teorema:

1.13. $<x, y> = <u, v> \rightarrow x = u \wedge y = v$,

esto es, dos pares ordenados son iguales si y sólo si los correspondientes elementos de estos son iguales. Es en este sentido que $<x, y>$ es un par ordenado. La prueba de este teorema no es difícil. (Véase Bernays [1937-43], 2, pág. 69.)

Ahora puede ser definida la *tríada ordenada* en términos del par ordenado.

1.14. Df. $<x, y, z> = <x, <y, z>>$

El teorema correspondiente vale para las tríadas ordenadas. Se puede definir por inducción la *n-ada* del siguiente modo:

1.15. Df. $<x_1, x_2, ..., x_n> = <x_1, <x_2, ..., x_n>>$

1.16. $<x_1, ..., x_n, <x_{n+1}, ..., x_{n+p}>> = <x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+p}>$,

que se prueba por inducción sobre n.
Para que $< >$ pueda ser definido para cualquier valor de n es conveniente especificar que

1.17. Df. $<x> = x$,

lo que implica la ecuación 1.16 para el caso $p = 1$.

Definimos también la *inclusión* $\subseteq$ y la *inclusión propia* $\subset$.

1.2. Df. $X \subseteq Y \leftrightarrow \forall u\, (u \in X \rightarrow u \in Y)$; $X \subset Y \leftrightarrow X \subseteq Y \wedge X \neq Y$

Se dice que una clase es *vacía* cuando no tiene elementos; «X es vacía» se denota por «**Vac**X», es decir:

1.22. Df. **Vac** $X \leftrightarrow \forall u (\neg u \in X)$

Cuando X e Y no tienen ningún elemento en común escribimos «**Dis** X Y», esto es, «X e Y son disjuntos».

1.23. Df. **Dis** X $Y \leftrightarrow \forall u \neg (u \in X \wedge u \in Y)$

Se dice que X es *unívoca*, y se denota mediante «**Un** X», cuando para todo u existe como máximo un v tal que $<v, u> \in X$, esto es:

1.3. Df. **Un** $X \leftrightarrow \forall uvw\, (<v, u> \in X \wedge <w, u> \in X \rightarrow v = w)$

Los axiomas del segundo grupo tratan de la existencia de clases:

Grupo B:

1. $\exists A \forall xy\, (<x, y> \in A \leftrightarrow x \in y)$
2. $\forall AB \exists C \forall u\, (u \in C \leftrightarrow u \in A \wedge u \in B)$
3. $\forall A \exists B \forall u\, (u \in B \leftrightarrow \neg u \in A)$
4. $\forall A \exists B \forall x\, (x \in B \leftrightarrow \exists y\, (<y, x> \in A))$
5. $\forall A \exists B \forall xy\, (<y, x> \in B \leftrightarrow x \in A)$
6. $\forall A \exists B \forall xy\, (<x, y> \in B \leftrightarrow <y, x> \in A)$
7. $\forall A \exists B \forall xyz\, (<x, y, z> \in B \leftrightarrow <y, z, x> \in A)$
8. $\forall A \exists B \forall xyz\, (<x, y, z> \in B \leftrightarrow <x, z, y> \in A)$

El axioma B1 se llama axioma de la relación $\in$, B2 axioma de la intersección, B3 axioma del complemento, B4 axioma del dominio, B5 axioma del producto cartesiano (porque, esencialmente, garantiza la existencia de $V \times A$, siendo V la clase universal), y B6-8 axiomas de inversión[4]. Obsérvese que la clase A del axioma B1 y la clase B en los axiomas B5-8 no están unívocamente determinadas, ya que no se dice nada acerca de si otros conjuntos que no sean pares (o tríadas) pertenecen o no a A (o a

[4] Obsérvese que los axiomas B7 y B8 tienen como consecuencia teoremas similares para cualquier permutación de una tríada.

B). Sin embargo, en los axiomas B2-4 las clases *C* y *B* están unívocamente determinadas (gracias al axioma A3). Estas clases unívocamente determinadas de B2-4 se denotan respectivamente mediante $A \cap B$, $-A$, $\mathscr{D}(A)$, y se llaman *intersección* de *A* y *B*, *complemento* de *A* y *dominio* de *A*. Así que $A \cap B$, $-A$ y $\mathscr{D}(A)$ están definidas por las siguientes propiedades:

1.4. Df. $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

1.41. Df. $x \in -A \leftrightarrow \neg x \in A$

1.5. Df. $x \in \mathscr{D}(A) \leftrightarrow \exists y(<y, x> \in A)$

El tercer grupo de axiomas trata de la existencia de conjuntos.

Grupo C:

1. $\exists a(\neg \mathbf{Vac}\ a \wedge \forall x(x \in a \rightarrow \exists y(y \in a \wedge x \subset y)))$
2. $\forall x \exists y \forall uv\ (u \in v \wedge v \in x \rightarrow u \in y)$
3. $\forall x \exists y \forall u\ (u \subseteq x \rightarrow u \in y)$
4. $\forall x A\ (\mathbf{Un} A \rightarrow \exists y \forall u\ (u \in y \leftrightarrow \exists v(v \in x \wedge <u, v> \in A)))$

El axioma 1 es el llamado *axioma de infinitud.* Dice que hay un conjunto no vacío *a* tal que dado un elemento *x* de *a* hay otro elemento *y* de *a* del cual *x* es un subconjunto propio. Según el axioma 2, para cada conjunto *x* hay otro conjunto *y* que incluye la unión de todos los elementos de *x*. El axioma 3 garantiza la existencia de un conjunto que incluye el conjunto de los subconjuntos de *x*. El axioma 4 es el *axioma del reemplazo,* dice que para *cualquier conjunto x y cualquier clase unívoca A existe* un conjunto *y* cuyos elementos son precisamente los conjuntos que están en la relación *A* con los miembros de *x*. (En vez de C4, Zermelo utiliza el *Aussonderungsaxiom*:

$\forall x \exists y \forall u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge u \in A)$

esto es, hay un conjunto cuyos elementos son precisamente aquellos de *x* que tengan la propiedad *A*).

El siguiente axioma (cuya consistencia probó v. Neumann en v. Neumann [1929]) no es indispensable, pero simplificará considerablemente el trabajo posterior.

Axioma D: $\neg \mathbf{Vac}\ A \rightarrow \exists u(u \in A \wedge \mathbf{Dis}\ uA)$

esto es, toda clase no vacía A tiene un elemento con el cual no tiene elementos en común[5]. Consecuencia de D es:

1.6. $\neg x \in x$

pues si hubiese un tal x, x sería un elemento común de x y $\{x\}$, pero, por D, para $A = \{x\}$, x no puede tener ningún elemento en común con $\{x\}$. Del mismo modo:

1.7. $\neg(x \in y \wedge y \in x)$

Se prueba de un modo similar considerando esta vez a $\{x, y\}$.

El siguiente axioma es el axioma de elección[6].

Axioma E: $\exists A(\mathbf{Un}A \wedge \forall x(\neg \mathbf{Vac}\ x \rightarrow \exists y(y \in x \wedge <y, x> \in A)))$

Esta es una formulación muy fuerte del *axioma de elección*, ya que garantiza la elección simultánea, mediante una relación unívoca, de un elemento de cada conjunto del universo en consideración. A partir de esta formulación se puede probar que todo el universo de los conjuntos puede ser bien ordenado. Esta formulación fuerte del axioma, si es consistente junto con los otros axiomas, supone, naturalmente, que una formulación más débil será también consistente.

Llamamos Σ al sistema de axiomas de los grupos A, B, C y D[7]. Cuando se enuncie un teorema sin mayores explicaciones debe entenderse que se sigue de Σ. Si el axioma E se necesita

---

[5] Este axioma equivale a afirmar que no existen secuencias infinitas y descendentes de conjuntos[8] (es decir, tales que $x_{n+1} \in x_n$), donde, no obstante, el término «secuencia» se refiere únicamente a secuencias representables mediante conjuntos del sistema en consideración. Es decir (usando las definiciones 4.65, 7.4 y 8.41), el axioma D (gracias a los axiomas de los grupos A, B, C, E) es equivalente a la sentencia $\neg \exists y\ \forall n\ (y(n+1) \in y(n))$.

[6] Nota añadida en la segunda edición: Usando la Df. 4.65 el axioma de elección puede formularse del siguiente modo, equivalente al axioma E; hay clases A que cumplen: $x \in y \rightarrow A(y) \in y$.

[7] Las diferencias más importantes entre Σ y el sistema de P. Bernays (Bernays [1937-43], 2) son:

1) Bernays no identifica los conjuntos con las clases que tienen su misma extensión.

para un teorema o una definición, su número quedará marcado por una *.

2. Existencia de clases y conjuntos

Definimos ahora la noción metamatemática de *fórmula primitiva*. Una fórmula primitiva será una fórmula bien construida que contenga únicamente variables, constantes $A_1, ..., A_k$, $\in$ y signos lógicos, y tal que todas sus variables ligadas sean variables de *conjuntos*. Por ejemplo,

$$\forall u(u \in X \rightarrow u \in A) \quad \text{y} \quad \forall u(u \in x \leftrightarrow \forall v(v \in u \rightarrow v \in y))$$

son fórmulas primitivas. Una fórmula es no primitiva cuando en ella aparece $\forall X$ o $\exists X$.

Más precisamente, una fórmula primitiva puede ser definida recursivamente del siguiente modo: Sean τ, σ, ..., símbolos que denoten variables o constantes; entonces

1) $\tau \in \sigma$ es una fórmula primitiva.

2) Si φ y ψ son fórmulas primitivas, también lo son $\neg \varphi$ y $\varphi \wedge \psi$.

3) Si φ es una fórmula primitiva, entonces $\exists x \varphi$ es una fórmula primitiva, y el resultado de sustituir x por cualquier otra variable de conjunto también es una fórmula primitiva.

4) Unicamente las fórmulas que se obtienen mediante 1), 2) y 3) son fórmulas primitivas.

2) Bernays introduce un nuevo axioma que postula la existencia de la clase de todos los $\{x\}$, lo que permite que B7 y B8 sean reemplazados por un sólo axioma.

El axioma D se debe esencialmente a v. Neumann (véase v. Neumann [1929], pág. 231, axioma VI, 4). Sin embargo, su formulación es más complicada por tener su sistema otros términos primitivos. La formulación concisa que se utiliza en este texto se debe a P. Bernays.

[8] Nota añadida en la segunda edición: El axioma D fue formulado por primera vez en esta forma con el nombre de «Fundierungsaxiom» por E. Zermelo en el artículo citado en página 231.

Los signos lógicos diferentes de $\neg$, $\wedge$ y $\exists$ no precisan ser mencionados, pues pueden ser definidos en términos de estos tres.

El siguiente metateorema dice que la extensión de cualquier fórmula primitiva está representada mediante una clase.

M1. *Teorema general de existencia:* Si $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula primitiva que no contiene más variables libres que $x_1, \dots, x_n$ (no necesariamente todas ellas) entonces existe una clase A tal que para cualesquiera *conjuntos* $x_1, \dots, x_n$:

$$<x_1, \dots, x_n> \in A \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

Para la prueba de este teorema se precisan varios resultados preliminares.

Por medio de los axiomas de la intersección y del complemento es posible probar la existencia de una *clase universal* V y una *clase vacía* 0. En virtud del axioma de extensionalidad, 0 y V están unívocamente determinadas por las propiedades:

2.1. Df. $\forall x \neg (x \in 0)$

2.2. Df. $\forall x \; x \in V$

Como consecuencia del axioma B5, el axioma del producto cartesiano, y B6, el axioma de la relación inversa, obtenemos:

2.3. $\forall A \exists B \forall xy \; (<x, y> \in B \leftrightarrow x \in A)$

Los tres siguientes teoremas son también consecuencias de B5, B7 y B8.

2.31. $\forall A \exists B \forall xyz \; (<z, x, y> \in B \leftrightarrow <x, y> \in A)$

2.32. $\forall A \exists B \forall xyz \; (<x, z, y> \in B \leftrightarrow <x, y> \in A)$

2.33. $\forall A \exists B \forall xyz \; (<x, y, z> \in B \leftrightarrow <x, y> \in A)$

Por ejemplo, el primero de estos teoremas se prueba sustituyendo el segundo miembro del par ordenado que aparece en B5 por un par ordenado y reescribiendo apropiadamente las variables. Los otros dos se obtienen aplicando a 2.31 los axiomas de inversión (B7 y B8).

Del mismo modo, sustituyendo x por $<x_1, x_2, \dots, x_n>$ en B5 obtenemos:

2.4. $\forall A \exists B \forall y x_1 \dots x_n (<y, x_1, x_2, \dots, x_n> \in B \leftrightarrow < x_1, \dots, x_n> \in A)$

Y a partir de éste, por iteración:

2.41. $\forall A \exists B \forall y_1 \dots y_k\, x_1 \dots x_n (<y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n> \in B \leftrightarrow < x_1, \dots, x_n> \in A)$

Similarmente:

2.5. $\forall A \exists B \forall y_1 \dots y_k\, x_1 \dots x_n (<x_1, y_1, \dots, y_k, x_2, \dots, x_n> \in B \leftrightarrow < x_1, \dots, x_n> \in A)$

Este último teorema puede obtenerse mediante iteración a partir del caso $k=1$, teniendo en cuenta que éste es un caso especial de 2.32 que se obtiene sustituyendo y por $<x_2, \dots, x_n>$ y aplicando el teorema 1.16.

Los teoremas siguientes se derivan de un modo análogo sustituyendo z e y por $<y_1, \dots, y_k>$, respectivamente, en 2.33 y 2.3, y aplicando 1.16.

2.6. $\forall A \exists B \forall x_1 x_2 y_1 \dots y_k (< x_1, x_2, y_1, \dots, y_k> \in B \leftrightarrow < x_1, x_2> \in A)$

2.7. $\forall A \exists B \forall x y_1 \dots y_k (<x, y_1, \dots, y_k> \in B \leftrightarrow x \in A)$

El siguiente (y de momento el último) teorema es una generalización del axioma B4, el axioma del dominio, y se obtiene sustituyendo x por $<x_2, \dots, x_n>$ en B4.

2.8. $\forall A \exists B \forall x_2 \dots x_n (<x_2, \dots, x_n> \in B \leftrightarrow \exists x_1 (<x_1, \dots, x_n> \in A))$

En particular, $B = \mathscr{D}(A)$ satisface esta equivalencia.

Para probar el teorema general de existencia podemos suponer que ninguna de las constantes $\mathbf{A}_i$ aparecerá como primer miembro en la relación $\in$, ya que $\mathbf{A}_i \in \tau$ puede ser siempre sustituido por $\exists x\ (x = \mathbf{A}_i \wedge x \in \tau)$ (por el axioma A2), y $x = \mathbf{A}_i$ puede ser reemplazado por $\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in \mathbf{A}_i)$ (por el axioma A3).

La prueba de M1 se realiza por inducción sobre el número de signos lógicos que aparezcan en φ.

Caso 1. φ no tiene signos lógicos.

En este caso φ tiene dos posibles formas: $x_r \in x_s$ o bien $X_r \in \mathbf{A}_k$, donde $l \leqslant r$, $s \leqslant n$. Si φ tiene la forma $x_r \in x_s$, debemos mostrar que existe una clase A tal que $<x_1, \ldots, x_n> \in A \leftrightarrow x_r \in x_s$. Cuando $r = s$, la clase A será 0, ya que, por 1.6, $\neg(x_r \in x_r)$. Si $r \neq s$, φ será de la forma $x_p \in x_q$, o bien $x_q \in x_p$, donde $p < q$. En el caso de que $x_p \in x_q$, el axioma B1 garantiza la existencia de una clase F tal que $<x_p, x_q> \in F \leftrightarrow x_p \in x_q$. En el caso de que $x_q \in x_p$, B1 y B6 aseguran la existencia de una clase F tal que $<x_p, x_q> \in F \leftrightarrow x_q \in x_p$.
Por tanto, en cualquier caso hay una F tal que

$$<x_p, x_q> \in F \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Por 2.6 hay una F_1 que cumple:

$$<x_p, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_n> \in F_1 \leftrightarrow <x_p, x_q> \in F$$

Por 2.5 existe una F_2 tal que:

$$<x_p, \ldots, x_n> \in F_2 \leftrightarrow <x_p, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_n> \in F_1$$

y finalmente, por 2.41, hay una clase A tal que:

$$<x_1, \ldots, x_n> \in A \leftrightarrow <x_p, \ldots, x_n> \in F_2.$$

Combinando las equivalencias obtenemos que:

$$<x_1, \ldots, x_n> \in A \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Si suponemos que φ tiene la forma $x_r \in \mathbf{A}_k$, hay, en virtud de 2.3, una F tal que $<x_r, x_{r+1}> \in F \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. (En el caso de que $r = n$, usando el axioma B5, se obtiene que $<x_{r-1}, x_r> \in F \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$). Ahora, como antes, se prueba la existencia de A por medio de los teoremas 2.6 y 2.41 y combinando las equivalencias resultantes.

Caso 2. φ tiene m signos lógicos $(m > 0)$.

φ tiene una de las tres siguientes formas:

(a) $\neg\psi$; (b) $\psi \wedge \chi$; (c) $\exists x\ \vartheta$

la hipótesis inductiva es que para cada fórmula primitiva $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ con $m_1 < m$ signos lógicos en la que ninguna constante $\mathbf{A}_i$

aparece en el contexto $\mathbf{A}_i \in \tau$, hay una clase A con las propiedades exigidas por el teorema. ψ, χ y ϑ son fórmulas primitivas con menos de m signos lógicos. ψ y χ tienen como máximo las variables libres $x_1, \ldots, x_n$, mientras que ϑ tiene a lo sumo $x, x_1, \ldots, x_n$ variables libres. $\mathbf{A}_i$ no puede aparecer ni en ψ ni en χ ni en ϑ en el contexto $\mathbf{A}_i \in \tau$, pues no puede aparecer en φ en ese contexto. Entonces, por la hipótesis inductiva, existen las clases B, C y D tales que:

$$<x_1, \ldots, x_n> \in B \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

$$<x_1, \ldots, x_n> \in C \leftrightarrow \chi(x_1, \ldots, x_n),$$

$$<x, x_1, \ldots, x_n> \in D \leftrightarrow \vartheta(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Para el caso (a), A es $-B$, ya que, por el axioma B3,

$$<x_1, \ldots, x_n> \in -B \leftrightarrow <x_1, \ldots, x_n> \notin B,$$

de modo que

$$<x_1, \ldots, x_n> \in -B \leftrightarrow \neg \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

es decir,

$$<x_1, \ldots, x_n> \in -B \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

En el caso (b) A será $B \cap C$, pues, por el axioma B2,

$$<x_1, \ldots, x_n> \in B \cap C \leftrightarrow <x_1, \ldots, x_n> \in B \wedge <x_1, \ldots, x_n> \in C$$

así que

$$<x_1, \ldots, x_n> \in B \cap C \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \chi(x_1, \ldots, x_n)$$

y por tanto,

$$<x_1, \ldots, x_n> \in B \cap C \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Para (c) A va a ser el dominio, $\mathscr{D}(D)$, porque, por el teorema 2.8,

$$<x_1, \ldots, x_n> \in \mathscr{D}(D) \leftrightarrow \exists x \ (<x, x_1, \ldots, x_n> \in D)$$

y por ello,

$$<x_1, \ldots, x_n> \in \mathscr{D}(D) \leftrightarrow \exists x \ \ \vartheta(x, x_1, \ldots, x_n),$$

de modo que

$$<x_1, \ldots, x_n> \in \mathscr{D}(D) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Con esto se completa la prueba del teorema general de existencia relativo a las fórmulas primitivas.

El teorema general de existencia es un *metateorema*, es decir, es un teorema sobre el sistema, no del sistema, y se limita a indicar de una vez y por todas cómo realizar en el sistema la derivación formal de una fórmula primitiva dada.

Hasta el momento el teorema de existencia se ha probado únicamente para fórmulas primitivas, pero el uso de símbolos introducidos por definición abre un campo más amplio de fórmulas para el cual sería deseable que valiese el teorema de existencia. Con este objetivo examinaremos los símbolos introducidos por definición hasta el momento. Pueden clasificarse en cuatro tipos del modo siguiente:

1. *Constantes:* 0, V, ...
2. *Relatores:* $\mathscr{C}x$, $\mathbf{Pr}X$, $\mathbf{Un}X$, $X \subseteq Y$, ...,
3. *Functores:* $-X, \mathscr{D}(X)$, $X \cap Y$, ...,
4. *Tipos de variables:* x, X, ... (definidos mediante relatores).

En lo sucesivo será necesario que todos los functores y relatores tengan significado, es decir, estén definidos, para cualquier clase como argumento. Hasta ahora éste ha sido el caso, excepto para los pares $\{x, y\}$ y $<x, y>$, y las n-adas, que han sido definidos únicamente para conjuntos. La extensión de argumentos a clases puede ser efectuada sustituyendo simplemente las variables libres de conjuntos en las definiciones por variables de clases, es decir:

3.1. Df. $\forall u\ (u \in \{X, Y\} \leftrightarrow u = X \vee u = Y)$

3.11. Df. $\{X\} = \{X, X\}$

3.12. Df. $<X, Y> = \{\{X\}, \{X, Y\}\}$, etc.

En virtud de estas definiciones, $\{X, Y\}$ puede ser $\{X, Y\}$ o $\{X\}$ o $\{Y\}$ o 0, según sean conjuntos X e Y, o uno de ellos o ninguno[9].

El mismo procedimiento de extensión se aplicará en las definiciones 4.211, 4.65, 6.31 y 7.4, en donde los relatores (o

[9] Nota añadida en la segunda edición: Sería deseable, por razones estéticas, que, en analogía con el axioma A2, tuviésemos que $<X, Y> \in Z \rightarrow \mathscr{C}X \wedge \mathscr{C}Y$. Esto se puede conseguir fácilmente reemplazando en Df. 3.1 $u = X$ por $u = X \vee (\mathbf{Pr}X \wedge u \in X)$ y del mismo modo $u = Y$ por $u = Y \vee (\mathbf{Pr}Y \wedge u \in Y)$. Si se adopta esta definición puede omitirse $\mathscr{C}A(x)$ en Df. 4.65. De otro modo es indispensable.

functores) considerados están originalmente definidos sólo si ciertos argumentos son conjuntos[10].

Las siguientes ideas metamatemáticas serán útiles. Un *término* se define inductivamente así: 1) toda variable es un término y toda constante es un término; 2) si **G** es un functor n-ario y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son términos, entonces $\mathbf{G}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ es un término; 3) no hay más términos que los obtenibles mediante 1) y 2). Si **R** es un relator n-ario y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son términos, entonces $\mathbf{R}\tau_1 \ldots \tau_n$ es una *fórmula mínima*. Una *fórmula* puede ser definida recursivamente como el resultado de combinar fórmulas mínimas por medio de los signos lógicos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y cuantificadores para cualquier tipo de variables.

Tenemos para cada uno de los cuatro tipos de símbolos un correspondiente tipo de definición.

1. Una constante de clase **A** se introduce mediante un *postulado definicional* $\varphi(\mathbf{A})$, donde φ es una fórmula que sólo contiene símbolos definidos previamente. Es necesario, sin embargo, haber probado antes que existe una única clase A que cumple $\varphi(A)$.

2. Un relator **R** se introduce mediante la estipulación:

$$\mathbf{R}X_1 \ldots X_n \leftrightarrow \varphi(X_1, \ldots, X_n),$$

donde φ es una fórmula que contiene sólo símbolos definidos con anterioridad.

como observó W. L. Duda, quien llamó mi atención sobre su omisión en la primera edición. No es difícil definir $\{X, Y\}$ de modo que 1.13 también valga para clases propias, pero como no va a haber ocasión de utilizar este hecho, no hay necesidad de modificación.

[10] Obsérvese que en todas estas definiciones no tiene ninguna importancia cómo estén definidos los relatores o functores considerados para los argumentos que sean clases propias[11]. El único propósito de definirlas generalizando para este caso es simplificar los conceptos metamatemáticos de «término» y «fórmula» definidos en la página 228 y la formulación de los teoremas M2-M6.

[11] Nota añadida en la segunda edición: Una observación similar es aplicable a muchos otros conceptos cuya definición usual sólo tiene sentido para ciertas clases, por ejemplo, **Inv** y **Conecta**, etc., para clases de pares; **Max** y **Lim** sólo para conjuntos de ordinales (respectivamente, con o sin mayor elemento), etc. Lo único que se pretende en las siguientes definiciones es que, en lo que respecta a los argumentos para los cuales los conceptos definidos tienen sentido en las definiciones usuales, concuerden con ellas. Para **Max** y **Lim**, por ejemplo, este requerimiento se satisface haciéndolos a ambos iguales a $\bigcup$. (Véase la Df. 7.31.)

3. Un functor **G** se introduce por medio de un *postulado definicional*

$$\forall X_1 \cdots X_n \, \varphi(\mathbf{G}(X_1, \ldots, X_n), X_1, \ldots, X_n),$$

donde φ es una fórmula que sólo contiene símbolos anteriormente definidos y previamente ha sido probado que

$$\forall X_1 \cdots X_n \exists! Y \, \varphi(Y, X_1, \ldots, X_n).$$

4. Una variable **x** se introduce mediante la estipulación de que para toda fórmula φ, $\forall \mathbf{x} \, \varphi(\mathbf{x})$ significa:

$$\forall X(\mathbf{R}X \rightarrow \varphi(X))$$

y $\exists \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x})$ significa:

$$\exists X(\mathbf{R}X \wedge \varphi(X)),$$

donde **R** es un relator previamente definido cuya extensión es llamada el *ámbito de variabilidad de* **x**.

Podemos llamar «conceptos» tanto a los relatores como a los functores.

Todas las definiciones introducidas hasta aquí son de este tipo: **R** se llama un *relator normal* si hay una fórmula primitiva φ tal que

$$\mathbf{R} \, X_1 \cdots X_n \leftrightarrow \varphi(X_1, \ldots, X_n),$$

G se llama un *functor normal* si hay una fórmula primitiva φ tal que

$$Y \in \mathbf{G}(X_1, \ldots, X_n) \leftrightarrow \varphi(Y, X_1, \ldots, X_n),$$

y una *variable se llama normal* cuando su ámbito de variabilidad son los elementos de una clase. La *fórmula $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ se llama normal* si únicamente contiene functores normales, relatores normales y variables normales ligadas; un término se llama normal cuando sólo contiene functores normales.

M2. Toda fórmula normal es equivalente a alguna fórmula primitiva y, por tanto, M1 es válido también para cualquier fórmula normal $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$.

Prueba: Sea $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ una fórmula normal dada. Ya que φ sólo contiene variables normales ligadas, todas las variables ligadas que no sean variables de conjuntos pueden ser sustituidas por

variables de conjuntos, por ejemplo, $\exists \mathbf{x}\chi(\mathbf{x})$ por $\exists x(x \in \mathbf{A} \wedge \chi(x))$, donde $\mathbf{A}$ define el ámbito de variabilidad de la variable $\mathbf{x}$. Ahora, puesto que todos los relatores $\mathbf{R}$ que aparecen en φ son normales, en cada caso se puede reemplazar la fórmula mínima $\mathbf{R}\tau_1 \cdots \tau_n$ por su equivalente $\psi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$, donde $\psi(X_1, \cdots, X_n)$ es una fórmula primitiva. De este modo, el único relator que queda es $\in$. De nuevo, siempre que en la expresión $\tau \in \sigma$, τ no sea una variable de conjunto, la expresión puede ser transformada como se indica en la página 224, tras el teorema 2.8, de modo que únicamente queden fórmulas mínimas de la forma $u \in \sigma$. Si σ no es una variable o una constante es de la forma $\mathbf{G}(\tau_1, \cdots, \tau_n)$, donde $\mathbf{G}$ es un functor normal. Pero $u \in \mathbf{G}(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ puede ser reemplazado por $\psi(u, \tau_1, \cdots, \tau_n)$, donde ψ es una fórmula primitiva que cumple $u \in \mathbf{G}(\tau_1, \ldots, \tau_n) \leftrightarrow \psi(u, \tau_1, \ldots, \tau_n)$. De este modo se reduce φ eliminando todos los functores. El resultado final de tales reducciones no puede ser otra cosa que una fórmula primitiva.

Con esto se acaba la prueba de que M1 es válido para fórmulas normales. Sólo queda comprobar que todos los conceptos introducidos hasta el momento son normales. Esto se hará construyendo para cada una de las correspondientes expresiones $Y \in \mathbf{G}(X_1, \cdots, X_n)$ y $\mathbf{R}X_1 \cdots X_n$, fórmulas equivalentes que sólo contengan relatores, functores y variables ligadas que previamente haya sido probado que son normales. Estas fórmulas son, en virtud de M2, equivalentes a fórmulas primitivas.

$X \in Y$; $\in$ es normal, pues $X \in Y$ es, por sí misma, una fórmula primitiva.

$X = Y \leftrightarrow \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$

$\mathscr{C}X \leftrightarrow \exists u(u = X)$

$\mathbf{Pr}X \leftrightarrow \neg \mathscr{C}X$

$Z \in \{X, Y\} \leftrightarrow (Z = X \vee Z = Y) \wedge \mathscr{C}Z$

$Z \in <X, Y> \leftrightarrow Z \in \{\{X\}, \{X, Y\}\}$ y del mismo modo para tríadas, etc.

$X \subseteq Y \leftrightarrow \forall u(u \in X \rightarrow u \in Y)$

$X \subset Y \leftrightarrow \forall u(u \in X \rightarrow u \in Y) \wedge X \neq Y$

$\mathbf{Un}X \leftrightarrow \forall uvw(<u, v> \in X \wedge <w, v> \in X \rightarrow u = w)$

$X \in -A \leftrightarrow \mathscr{C}X \land \neg X \in A$
$X \in A \cap B \leftrightarrow X \in A \land X \in B$
$X \in \mathscr{D}(A) \leftrightarrow \mathscr{C}X \land \exists y(<y, X> \in A)$
$\mathbf{Vac}X \leftrightarrow \neg \exists u(u \in X)$
$\mathbf{Dis}XY \leftrightarrow \neg \exists u(u \in X \land u \in Y)$

Los teoremas generales de existencia M1 y M2 (y asimismo los últimos teoremas M3-M6) se usan frecuentemente en estas páginas sin ser citados explícitamente.

Las constantes $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ que pueden aparecer en la fórmula normal $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ son totalmente arbitrarias y pueden, por tanto, ser reemplazadas por las variables de clase $X_1, \ldots, X_k$, de modo que el teorema de existencia toma la siguiente forma:

M3. $\forall X_1 \ldots X_k, \exists A \forall x_1 \ldots x_n (<x_1, \ldots, x_n> \in A \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_k))$, si φ es normal.

Las siguientes definiciones están en su mayor parte basadas en esta versión del teorema de existencia. Está claro, tras analizarlo, que en cada una de las aplicaciones de M3 φ es normal.

El *producto cartesiano* $A \times B$ se define mediante el postulado:

4.1. Df. $\forall x(x \in A \times B \leftrightarrow \exists yz\ (x = <y, z> \land y \in A \land z \in B))$

En esta aplicación de M3, A y B han sido consideradas como las constantes. La definición asegura la existencia de $A \times B$ para todo A y B. El axioma de extensionalidad garantiza que $A \times B$ es único.

4.11. Df. $A^2 = A \times A$
4.12. Df. $A^3 = A \times (A^2)$

$A^4, A^5, \ldots$, se definen similarmente. De este modo V^2 es la clase de todos los pares ordenados, V^3 es la clase de todas las tríadas ordenadas, etc. Como toda tríada es un par, se sigue que

4.13. $V^3 \subseteq V^2$

Las *relaciones* van a ser definidas como clases de pares ordena-

dos, las *relaciones triádicas* como clases de tríadas ordenadas, etc.

4.2. Df. $\mathbf{Rel}X \leftrightarrow X \subseteq V^2$
4.21. Df. $\mathbf{Rel}_3 X \leftrightarrow X \subseteq V^3$

y similarmente para $n \geqslant 2$. «$\mathbf{Rel}X$» también puede escribirse como «$\mathbf{Rel}_2 X$».

Si A es una relación, entonces $<x, y> \in A$ puede leerse «x está en la relación A con y», y puede escribirse xAy, es decir,

4.211. Df. $xAy \leftrightarrow <x, y> \in A$.

Las relaciones podrían ser consideradas como funciones equívocas, de modo que xAy podría ser también leído como «x es un *valor* de A para el argumento y», o como «x es una *imagen* de y en A», o, por último, «y es un *original* de x en A». Como un corolario del axioma de extensionalidad hay un principio de extensionalidad para relaciones:

4.22. $\mathbf{Rel}X \wedge \mathbf{Rel}Y \rightarrow (\forall uv(<u, v> \in X \leftrightarrow <u, v> \in Y) \rightarrow X = Y)$

El principio de extensionalidad para relaciones es válido también para relaciones n-ádicas de un modo similar. Como consecuencia de esto, el teorema de existencia toma la forma:

M4. Para cada fórmula normal $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ hay una única relación n-ádica A tal que $\forall x_1 \ldots x_n (<x_1, \ldots, x_n> \in A \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n))$.

La prueba es inmediata. Escójase una clase arbitraria A' que satisfaga la condición y sea $A = A' \cap V^n$. A es una relación n-ádica y, a causa del principio de extensionalidad 4.22, es única.

A, tal y como queda definida por M4, se denota mediante $\{<x_1, \ldots, x_n> / \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son variables normales, $\{<\alpha_1, \ldots, \alpha_n> / \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$ es, por definición, lo mismo que $\{<x_1, \ldots, x_n> / \varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge x_1 \in C \wedge \ldots \wedge x_n \in C\}$, donde C es el ámbito de variabilidad de las variables α_i. (Obsérvese que el símbolo $\{<\cdots>/\cdots\}$ no pertenece a ninguno de los cuatro tipos de símbolos introducidos en la página 227, y por ello no será usado ni en definiciones ni en aplicaciones de M2-M6).

La relación-$\in$ E y la relación de identidad I pueden definirse por medio de M4.

4.3. Df. $\mathbf{Rel}E \wedge \forall uv(<u, v> \in E \leftrightarrow u \in v)$
4.31. Df. $\mathbf{Rel}I \wedge \forall Uv(<u, v> \in I \leftrightarrow u = v)$

I es la clase de todos los pares $<u, u>$.

Las siguientes definiciones 4.4, 4.41 y 4.411 de las *relaciones inversas* corresponden a los axiomas B6, 7, 8.

4.4. Df. $\mathbf{Rel}\ \mathbf{Inv}(X) \wedge \forall uv(<u, v> \in \mathbf{Inv}(X) \leftrightarrow <v, u> \in X)$
4.41. Df. $\mathbf{Rel}\ \mathbf{Inv}_2(X) \wedge \forall uvw(<u, v, w> \in \mathbf{Inv}_2(X) \leftrightarrow <v, w, u> \in X)$
4.411. Df. $\mathbf{Rel}\ \mathbf{Inv}_3(X) \wedge \forall uvw(<u, v, w> \in \mathbf{Inv}_3(X) \leftrightarrow <u, w, v> \in X)$
4.412. Df. $\mathbf{Inv}(X)$ también se denota mediante $\mathbf{Inv}_1(X)$ y X^{-1}.

Los functores diádicos Booleanos «$\cup$» y «$-$» se definen en términos de «$\cap$» y el complemento «$-$»:

4.42. Df. $X \cup Y = -((-X) \cap (-Y))$
4.43. Df. $X - Y = X \cap (-Y)$
4.44. Df. $\mathscr{R}(X) = \mathscr{D}(X^{-1})$

$\mathscr{R}(X)$ es el *recorrido*, o dominio de los valores, de X.
La relación «*A restringida a B*» se escribe «$A \upharpoonright B$».

4.5. Df. $A \upharpoonright B = A \cap (V \times B)$

$A \upharpoonright B$ es la clase de todos los elementos de A que son pares ordenados cuyo segundo miembro pertenece a B. En este sentido, «$A \upharpoonright B$» es «A restringida a B» porque los argumentos de A tienen la restricción de pertenecer a B. De aquí se obtiene el teorema:

4.51. $\mathscr{D}(A \upharpoonright B) = B \cap \mathscr{D}(A)$
4.512. Df. $B \upharpoonleft A = A \cap (B \times V)$
4.52. Df. $B[X] = \mathscr{R}(B \upharpoonright X)$

$B[X]$ es la clase de todas las imágenes en B de los elementos de X.

4.53. Df. $(<x, y> \in R \circ S \leftrightarrow \exists z\ (xRz \wedge zSy)) \wedge \mathbf{Rel}R \circ S$

4.6. Df. $\mathbf{Biun}X \leftrightarrow \mathbf{Un}X \wedge \mathbf{Un}X^{-1}$
$\mathbf{Biun}X$ significa que X es *biunívoca*, esto es, que la relación

$X \cap V^2$ es biunívoca. Si X es una relación y es unívoca, se dice que X es una *función.*

4.61. Df. $\mathbf{Fnc}X \leftrightarrow \mathbf{Rel}X \wedge \mathbf{Un}X$

Una función X cuyo dominio es A se llama *función sobre* A.

4.63. Df. $X\mathbf{Fn}A \leftrightarrow \mathbf{Fnc}X \wedge \mathscr{D}(X)=A$

$A(x)$, (el A de x), denota el y tal que $<y, x> \in A$, si hay un tal y y es único; si y no existe o no es único, $A(x)=0$. De aquí que el postulado definicional de $A(x)$ rece como sigue:

4.65. Df. $(\exists! y(<y, x> \in A) \rightarrow <A(x), x> \in A) \wedge (\neg \exists! y(<y, x> \in A) \rightarrow A(x)=0) \wedge \mathscr{C}A(x)$

Del principio de extensionalidad para relaciones (4.22) se obtiene el siguiente principio de extensionalidad para funciones:

4.67. $X\mathbf{Fn}A \wedge Y\mathbf{Fn}A \wedge (\forall u(u \in A \rightarrow X(u)=Y(u)) \rightarrow X=Y)$

M5. Si $\tau(u_1, \ldots, u_n)$ es un término normal, si $B \subseteq V^n$ y si

$$<u_1, \ldots, u_n> \in B \rightarrow \mathscr{C}\tau(u_1, \ldots, u_n),$$

entonces hay una única función C sobre B tal que

$$C(<u_1, \ldots, u_n>)=\tau(u_1, \ldots, u_n) \text{ para } <u_1, \ldots, u_n> \in B.$$

Prueba: Defínase C mediante la condición:
$<u, u_1, \ldots, u_n> \in C \leftrightarrow u=\tau(u_1, \ldots, u_n) \wedge <u_1, \ldots, u_n> \in B$.
Como el lado derecho de la equivalencia es una fórmula normal, hay, en virtud de M4, una relación C $(n+1)$-ádica que satisface la condición. Obviamente, C satisface la condición del teorema.
M5 puede generalizarse del siguiente modo:

M6. Si $B_1, \ldots, B_k$ son clases disjuntas, $B_i \subseteq V^n$, y si $\tau_1, \ldots, \tau_k$ son términos normales tales que $\mathscr{C}\tau_i(u_1, \ldots, u_n)$ para $<u_1, \ldots, u_n> \in B_i$, entonces hay una única función C sobre $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ tal que $C(<u_1, \ldots, u_n>)=\tau_i(u_1, \ldots, u_n)$ para $<u_1, \ldots, u_n> \in B_i$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Definimos ahora cinco funciones especiales $P_1, \ldots, P_5$ mediante los siguientes postulados:

4.71. Df. $P_1(<x, y>)=x \wedge P_1\mathbf{Fn}V^2$

4.72. Df. $P_2(<x, y>) = y \wedge P_2 \mathbf{Fn} V^2$
4.73. Df. $P_3(<x, y>) = <y, x> \wedge P_3 \mathbf{Fn} V^3$
4.72. Df. $P_4(<x, y, z>) = <z, x, y> \wedge P_4 \mathbf{Fn} V^3$
4.75. Df. $P_5(<x, y, z>) = <x, z, y> \wedge P_5 \mathbf{Fn} V^3$

La existencia y la unicidad de P_1, ..., P_5 se siguen de M5.

4.8. Df. $u \in \bigcup X \leftrightarrow \exists v(u \in v \wedge v \in X)$

$\bigcup X$ se llama la *gran unión de X*. Los resultados siguientes son inmediatos:

4.81. $\bigcup \{x, y\} = x \cup y$
4.82. $\bigcup \{x\} = x$
4.83. $\bigcup X = E[X]$

Ahora definimos $\mathscr{P}(X)$, la *clase de las partes de X*, que es la clase de los subconjuntos de X.

4.84. Df. $u \in \mathscr{P}(X) \leftrightarrow u \subseteq X$

De entre las operaciones definidas, algunas tienen propiedades de monotonía, por ejemplo,

4.85. $X \subseteq Y \rightarrow \mathscr{D}(X) \subseteq \mathscr{D}(Y)$

Se comprueba fácilmente que $\mathscr{R}, \bigcup, \mathscr{P}$, y $\mathbf{Inv}_n$ tienen propiedades similares. También

4.86. $A \subseteq B \wedge X \subseteq Y \rightarrow A[X] \subseteq A[Y]$

« $\upharpoonleft$ », « $\restriction$ », «$\cup$», «$\cap$», y « $\times$ » tienen propiedades similares.

También tenemos algunos casos de la propiedad distributiva, tales como

4.87. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Esto lleva al caso especial

4.871. $(A \times V) \cap (V \times B) = A \times B$

Del mismo modo

4.88 $\bigcup (X \cup Y) = (\bigcup X) \cup (\bigcup Y)$
4.89. $\bigcup (X \cap Y) \subseteq (\bigcup X) \cap (\bigcup Y)$

Los siguientes teoremas se obtienen de las definiciones 4.71-4.75, y son, a poco que se analicen, inmediatos.

4.91. $\mathscr{R}(A) = P_1[A]$

4.92. $\mathscr{D}(A) = P_2[A]$

4.93. $\mathbf{Inv}(A) = P_3[A]$

4.94. $\mathbf{Inv}_2(A) = P_4[A]$

4.95. $\mathbf{Inv}_3(A) = P_5[A]$

4.96. $V \times A = P_2^{-1}[A]$

La prueba de la normalidad de los relatores y functores introducidos últimamente, así como la de los que se introducirán más adelante, está en la página 286.

Los resultados obtenidos hasta aquí dependen de los dos primeros grupos de axiomas. Los teoremas que versan sobre la existencia de conjuntos dependen, sin embargo, de los últimos axiomas. Los siguientes teoremas se derivan del axioma C4, el axioma de la sustitución.

5.1. $\mathbf{Un}A \wedge \mathscr{C}X \rightarrow \mathscr{C}A[X]$

Prueba: Como $\mathscr{C}X$, hay, por C4, un conjunto y cuyos elementos son precisamente los conjuntos que están con los miembros de X en la relación $A \cap V^2$, es decir, $\forall u(u \in y \leftrightarrow u \in A[X])$, de modo que, por el axioma de extensionalidad, $y = A[X]$. Por tanto, $\mathscr{C}A[X]$.

5.11. $\mathscr{C}X \rightarrow \mathscr{C}X \cap Y$

Prueba: Sustitúyase A por $I \upharpoonright Y$ en 5.1, obteniendo así $\mathscr{C}(I \upharpoonright Y)[X]$. Pero $(I \upharpoonright Y)\,[X] = X \cap Y$.

5.12. $\mathscr{C}X \wedge Y \subseteq X \rightarrow \mathscr{C}Y$

Prueba: $Y \subseteq X \rightarrow Y = X \cap Y$. Entonces, por 5.11, el teorema está probado.

5.121. $\mathscr{C}X \rightarrow \mathscr{C}\mathscr{P}(X)$

Prueba: El axioma C3 garantiza la existencia de un y tal que $\mathscr{P}(X) \subseteq y$. Luego, por 5.12, $\mathscr{C}\mathscr{P}(X)$.

5.122. $\mathscr{C}X \rightarrow \mathscr{C}\bigcup X$

Prueba: Se demuestra de un modo similar, utilizando el axioma C2 y 5.12.

5.13. $\mathscr{C}X \wedge \mathscr{C}Y \rightarrow \mathscr{C}X \cup Y$

Prueba: Si X e Y son conjuntos, tenemos que $X \cup Y = \bigcup\{X, Y\}$, y por el axioma A4, $\{X, Y\}$ es un conjunto. En consecuencia, por 5.122, $\mathscr{C}X \cup Y$. Los tres siguientes teoremas se prueban mediante 5.1, usando 4.91-4.95.

5.14. $\mathscr{C}\mathscr{D}(x)$

5.15. $\mathscr{C}\mathbf{Inv}_n(x)$ $(n=1, 2, 3)$

5.16. $\mathscr{C}\mathscr{R}(x)$

De 5.14 y M5 se sigue que hay una función Do tal que:

5.17. Df. $Do(x) = \mathscr{D}(x) \wedge Do\mathbf{Fn}V$

5.18. $\mathscr{C}x \times y$

Prueba: Los miembros de $x \times y$ son los pares $<u, v>$ tales que $u \in x$, $v \in y$. Así pues, u y v son, en especial, elementos de $x \cup y$, de modo que $\{u\}$ y $\{u, v\}$ son subconjuntos de $x \cup y$. Por tanto, $\{\{u\}, \{u, v\}\}$ es un subconjunto de $\mathscr{P}(x \cup y)$, es decir, $<u, v> \subseteq P(x \cup y)$, de modo que $<u, v> \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(x \cup y))$. Por tanto, gracias a 5.121, 5.12 y 5.13, $\mathscr{C}x \times y$.

5.19. $F\mathbf{Fn}x \rightarrow \mathscr{C}F$

Prueba: $F\mathbf{Fn}x \rightarrow F \subseteq (F[x]) \times x$, y entonces $\mathscr{C}F$, por 5.1, 5.18, 5.12.

5.2. $\mathbf{Un}F \rightarrow \mathscr{C}F \upharpoonright x$

Prueba: $F \upharpoonright x$ es una función sobre $\mathscr{D}(F \upharpoonright x)$ y $\mathscr{D}(F \upharpoonright x) \subseteq x$ y, por tanto, el dominio es un conjunto. Entonces, por 5.19, se prueba el teorema.

5.3. $\mathscr{C}0$

Prueba: $0 \subseteq x$, por consiguiente, $\mathscr{C}0$, utilizando 5.12.

5.31. $\neg \mathscr{C}V$

Prueba: $x \in V$, de modo que si $\mathscr{C}V$ obtendríamos que $V \in V$, pero, por 1.6, esto no es posible.

5.4. $\mathbf{Pr}X \rightarrow \mathbf{Pr} \bigcup X$

Prueba: Si suponemos que $\mathscr{C}\bigcup X$, entonces $\mathscr{C}\mathscr{P}(\bigcup X)$, pero $X \subseteq \mathscr{P}(\bigcup X)$, y, por tanto, $\mathscr{C}X$, lo que es contrario a la hipótesis. Similarmente:

5.41. $\mathbf{Pr}X \rightarrow \mathbf{Pr}\ \mathscr{P}(X)$

5.42. $\mathbf{Pr}X \rightarrow \mathbf{Pr}\, X \cup Y$

5.43. $\mathbf{Pr}X \wedge \neg \mathbf{Vac}\ Y \rightarrow \mathbf{Pr}\ X \times Y$

Prueba: $X \subseteq \bigcup\bigcup(X \times Y)$, si $Y \neq 0$.

5.44. $\mathbf{Biun}F \wedge X \subseteq \mathscr{D}(F) \rightarrow (\mathbf{Pr}X \rightarrow \mathbf{Pr}\ F[X])$,

esto es, la imagen de una clase propia según una función biunívoca es una clase propia. La prueba se sigue del hecho de que $X \subseteq F^{-1}[F[X]]$, si $X \subseteq \mathscr{D}(F)$. Entonces, si $F[X]$ fuese un conjunto, por 5.1 y 5.12, X también sería un conjunto.

5.45. $\mathbf{Pr}A \rightarrow \mathbf{Pr}\ A - x$

Esto se sigue de la inclusión $A \subseteq (A-x) \cup x$, y de 5.13.

3. Números ordinales

Ahora, con la ayuda de ciertas definiciones preliminares, pueden ser definidos los números ordinales.

6.1. Df. Y **Conecta** $X \leftrightarrow X^2 \subseteq Y \cup Y^{-1} \cup I$

esto es, Y *conecta* X si para cada par de elementos distintos u, v de X ocurre que $<u, v> \in Y$, o bien, $<v, u> \in Y$.

6.11. Df. Y es *transitiva* en X si para cualesquiera elementos u, v, w de X: $<u, v> \in Y \wedge <v, w> \in Y \rightarrow <u, w> \in Y$.

6.12. Df. Y es *asimétrica* en X si no existen elementos u, v, de X tales que $<u, v> \in Y \wedge <v, u> \in Y$.

6.2. Df. Y **Bien-ordena** $X \leftrightarrow Y$ **Conecta** $X \wedge \forall U(U \neq 0 \wedge U \subseteq X \rightarrow \exists v(v \in U \wedge U \cap Y[\{v\}] = 0))$

es decir, Y *bien-ordena* X si Y conecta X y cualquier subconjunto no vacío U de X tiene un primer elemento en el orden Y, pues

$U \cap Y[\{v\}] = 0$ dice que no hay ningún miembro de U que esté con v en la relación Y. Obsérvese que el símbolo introducido Y **Bien-ordena** X no es normal a causa de la variable ligada U[12].

6.21. Si Y **Bien-ordena** X, entonces Y es transitiva y asimétrica en X.

Prueba: Y es asimétrica en X, puesto que si xYy y yYx, entonces la clase $\{x, y\}$ no tiene primer elemento. Para probar la transitividad en X, supongamos que xYy y yYz; entonces $x \neq z$ por la asimetría, de modo que o bien xYz o bien zYx. Considérese el subconjunto $U = \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$. Si zYx, entonces U no tendría primer elemento, de modo que xYz.

6.3. Df. X $\mathbf{Sec}_R$ $Y \leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \cap R[X] \subseteq X$

esto es, *X es una R-sección de Y* si todos los R-antecesores en Y de los miembros de X también pertenecen a X.

6.30. Df. X es una R-sección *propia* de Y si es una R-sección de Y y no es igual a Y.

6.31. Df. $\mathbf{Seg}_R(X, u) = X \cap R[\{u\}]$,

esto es, si $u \in X$, *el R-segmento de X generado por u* es la clase de elementos de X que son R-predecesores de u.

---

[12] Nota añadida en la segunda edición: Las afirmaciones hechas tras las definiciones 6.2 y 8.1 y en la página 286 al efecto de que **Bien-ordena** y $\sim$ no son normales son incorrectas si se define la normalidad como en la página 229. Según *esa* definición, la normalidad de un concepto no tiene nada que ver con el modo en que esté definido, sino que depende únicamente de su extensión. Por tanto, todo lo que, prima facie, puede decirse sobre **Bien-ordena** y $\sim$ es que no se puede probar que son normales con los métodos utilizados para los otros conceptos en la página 286. Sin embargo, se puede probar que son normales de un modo diferente supuesto el axioma de elección. Pues, bajo este supuesto, se puede probar que

$$X \sim Y \leftrightarrow X \not\approx Y \vee (\mathbf{Pr}\, X \wedge \mathbf{Pr}\, Y)$$

(Véase J. v. Neumann [1929]). Además, U puede ser sustituido por u en la Df. 6.2 porque la existencia de una clase sin primer elemento implica la existencia en ella de una secuencia descendente de tipo ω. La última prueba requiere la elección de un elemento de cada clase no vacía, lo cual, sin embargo, puede llevarse a cabo considerando en cada clase el *subconjunto* de elementos de menor nivel («Stufe») (en el sentido de J. v. Neumann, l. c., pág. 238).

6.32. $\mathbf{Seg}_R(X, u)$ es una R-sección de X si $u \in X$ y R es transitiva en X.

Por tanto:

6.33. Si R **Bien-ordena** X, entonces todo R-segmento generado por algún elemento de X es una R-sección.

A la inversa, si R **Bien-ordena** X y Y es una R-sección propia de X, entonces Y es un R-segmento de X, a saber, el generado por el primer elemento de $X - Y$.

Si R es una relación biunívoca de dominio A y recorrido B, entonces se dice que R es un *isomorfismo de A en B respecto a S y T* si ocurre que para cada par de elementos u, v de A tales que uSv los correspondientes elementos de B están en la relación T, y a la inversa, es decir:

6.4. Df. $R\ \mathbf{Isom}_{S,T}(A, B) \leftrightarrow \mathbf{Biun}R \wedge \mathbf{Rel}R \wedge \mathscr{D}(R) = A \wedge \mathscr{R}(R) = B \wedge \forall uv(u \in A \wedge v \in A \rightarrow (uSv \leftrightarrow R(u)TR(v)))$

Si hay un isomorfismo de A en B respecto a S y T, se dice que A *es isomorfo a B respecto a S y T.* Si en 6.4 $S = T$, se dice que R es un *isomorfismo de A en B respecto a S.*

6.41. Df. R es un *isomorfismo respecto a S* si es un isomorfismo de $\mathscr{D}(R)$ en $\mathscr{R}(R)$ respecto a S.

Del mismo modo se define el «Isomorfismo respecto a una relación n-ádica S».

El método usado para construir los ordinales se debe fundamentalmente a J. v. Neumann. El ordinal α será la clase de los ordinales menores que α. Por ejemplo, 0 será el conjunto vacío, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, ω será el conjunto de todos los números naturales, etc. De este modo la clase de los ordinales estará bien ordenada por la relación $\in$, de manera que $\alpha \in \beta$ corresponderá a $\alpha < \beta$. Cualquier ordinal estará bien ordenado por la relación $\in$, pues todo ordinal es una clase de ordinales. Además, cualquier elemento de un ordinal debe ser igual al segmento que genera, pues tal segmento es el conjunto de los ordinales menores que él. Estas consideraciones conducen a la siguiente definición:
Definición: X es un *ordinal* si

1. E **Bien-ordena** X
2. $u \in X \rightarrow u = Seg_E(X, u)$.

Sin embargo, como mostró R. M. Robinson (Robinson [1937], pág. 35. Bernays probó previamente que la transitividad de E en X y 2′ son suficientes), las condiciones 1 y 2, gracias al axioma D, pueden ser reemplazadas por las condiciones más débiles:

1′. E **Conecta** X

2′. $u \in X \rightarrow u \subseteq X$.

Se dice que X es *inclusiva* si tiene la propiedad 2′, es decir, si cualquier elemento de un elemento de X es un elemento de X, esto es,

6.5. Df. **Incl** $X \leftrightarrow \forall u(u \in X \rightarrow u \subseteq X)$

6.51. **Incl** $X \leftrightarrow \bigcup X \subseteq X$

La prueba es inmediata a partir de 6.5 y 4.8.

6.6. Df. **Ord** $X \leftrightarrow$ **Incl** $X \wedge E$ **Conecta** X

Esta definición combina las condiciones 1′ y 2′. Un ordinal que sea un conjunto se llama un *número ordinal*, y se denota mediante **Número-ordinal** X.

6.61. Df. **Número-ordinal** $X \leftrightarrow$ **Ord** $X \wedge \mathscr{C}X$

La clase de los números ordinales se denota mediante Ω. (Respecto a la normalidad de **Ord**, véase la pág. 287).

6.62. Df. $x \in \Omega \leftrightarrow$ **Número-ordinal** X

Df. Las letras α, β, γ, ..., se usarán como variables con ámbito de variabilidad constituido por la clase de los números ordinales. Evidentemente, estas variables son normales.

6.63. Df. $X < Y \leftrightarrow X \in Y$

6.64. Df. $X \leqslant Y \leftrightarrow X < Y \vee X = Y$

6.65. **Incl** $X \wedge$ **Incl** $Y \rightarrow$ **Incl** $X \cup Y \wedge$ **Incl** $X \cap Y$

Prueba: Por 4.88, $\bigcup(X \cup Y) = (\bigcup X) \cup (\bigcup Y)$. Entonces, por 6.51, **Incl** $X \cup Y$. Similarmente para $X \cap Y$, por 4.89.

El siguiente paso es mostrar que la definición 6.6 es equivalente a la definición más fuerte, es decir,

6.7. 1. **Ord** $X \rightarrow E$ **Bien-ordena** X

2. **Ord** $X \wedge u \in X \rightarrow u =$ **Seg**$_E$ (X, u)

Prueba de 1: Dado un subconjunto no vacío Y de X, hay un u, por el axioma D, tal que $u \in Y$ y $Y \cap u = 0$, es decir, $Y \cap E[\{u\}] = 0$, pues $u = \bigcup\{u\} = E[\{u\}]$, por 4.83 y 4.82. Entonces, por la definición 6.2, E **Bien-ordena** X, pues E **Conecta** X por definición de **Ord**.

Prueba de 2: Si **Ord**X y $u \in X$, entonces $\mathbf{Seg}_E(X, u) = X \cap E[\{u\}] = X \cap u = u$, por la definición 6.31 y la inclusividad de X.

7.1. **Ord** $X \wedge Y \subset X \rightarrow$ (**Incl** $Y \rightarrow Y \in X$)

Prueba: $\bigcup Y \subseteq Y$, de modo que, por 4.83, $E[Y] \subseteq Y$. Entonces, por la definición 6.3, Y es una sección de X. Consiguientemente, por 6.33, Y debe ser un segmento de X, generado por algún elemento u de X. Pero entonces, por 6.7, $Y = u$, con lo cual $Y \in X$.

7.11. **Ord** $X \wedge$ **Ord** $Y \rightarrow (Y \subset X \leftrightarrow Y \in X)$

Prueba: Como Y es un ordinal, es inclusivo. Entonces 7.1 establece ya la equivalencia en un sentido. El otro sentido sólo expresa el hecho de que X es inclusivo, pues por 1.6 se excluye el caso de que $X = Y$.

7.12. Si X e Y son ordinales, entonces uno y sólo uno de los tres siguientes casos ocurre: $X \in Y$, $Y \in X$, $Y = X$.

Prueba: $X \cap Y \subseteq X$ y $X \cap Y \subseteq Y$. Si suponemos que $X \cap Y \subset X$ y $X \cap Y \subset Y$, entonces, por 7.1, $X \cap Y \in X$ y $X \cap Y \in Y$, pues la intersección de dos clases inclusivas es inclusiva (6.65). Pero esto implica que $X \cap Y \in X \cap Y$, lo cual, por 1.6 y el axioma A.2, es imposible. Entonces, o bien $X \cap Y = X$ o bien $X \cap Y = Y$, es decir, o bien $Y \subseteq X$ o bien $X \subseteq Y$, esto es, $X \subset Y \vee X = Y \vee Y \subset X$, y, por tanto, $X \in Y \vee X = Y \vee Y \in X$, en virtud de 7.11. Por consiguiente, se da al menos uno de los tres casos. Además no pueden darse simultáneamente dos de ellos, pues ocurría que $X \in X$ o bien $X \in Y \wedge Y \in X$, y esto, por 1.6, 1.7 y el axioma A2, es imposible.

7.12 y 6.63 expresan el hecho de dos ordinales cualesquiera son comparables. Por 6.1, esto implica lo siguiente:

7.13. E **Conecta** Ω

7.14. **Ord** $A \rightarrow A \subseteq \Omega$

Prueba: Sea A un ordinal y x un elemento de A. Tenemos que probar que E **Conecta** x y que **Incl** x. Si $z \in y$ e $y \in x$, como A es inclusiva, tenemos que $y \in A$, y, por iteración, que $z \in A$. Como E es una relación de buen orden en A, por 6.21, es transitiva en A, de modo que $z \in x$. Por tanto, x es inclusivo. E **Conecta** A y $x \subseteq A$, así que E **Conecta** x.

7.15. **Incl** Ω

Prueba: Por 714, $x \in \Omega \rightarrow x \subseteq \Omega$

7.16. **Ord** Ω

Prueba: 7.13, 7.15 y 6.6.

7.161. Ω (y, por tanto, cualquier clase de números ordinales) está bien ordenado por E.

Esto se sigue inmediatamente de 7.16 y 6.7, y nos permite probar propiedades de los números ordinales mediante inducción transfinita, en la medida en que las propiedades en consideración estén definidas por medio de una fórmula normal, pues, bajo este supuesto, existe la clase de los ordinales que no tengan esa propiedad, por M2, y dicha clase (si no es vacía) contiene, por 7.161 y la definición 6.2, un menor elemento. Por prueba inductiva se debe entender siempre la reductio ad absurdum de la existencia de un menor ordinal que no tenga la propiedad en cuestión.

En virtud de 7.14, cualquier elemento de un número ordinal es, a su vez, un número ordinal, de modo que un número ordinal x es igual al conjunto de ordinales menores que x, pues la relación $\in$ es la relación que ordena los ordinales.

7.17. **Pr** Ω

Prueba: Ω es un ordinal, de modo que si $\mathscr{C}\Omega$, entonces Ω sería un número ordinal y, por tanto, $\Omega \in \Omega$, lo cual no es posible (1.6).

7.2. **Ord** $X \rightarrow X \in \Omega \vee X = \Omega$. El único ordinal que no es un número ordinal es Ω.

Prueba: Por 7.14, $X \subseteq \Omega$. Si $X \subset \Omega$, entonces, por 7.11, $X \in \Omega$.

7.21. Cada E-sección de un ordinal es un ordinal.

Prueba: Cualquier E-sección propia de un ordinal X es (por 6.33 y 6.7 (2)) un elemento de X, y consiguientemente, por 7.14, un ordinal. Una E-sección no propia de X es igual a X.

7.3. $A \subseteq \Omega \rightarrow \mathbf{Ord} \bigcup \mathbf{A}$

Prueba: $\bigcup A$ es inclusiva, pues si $x \in \bigcup A$ hay un ordinal α tal que $x \in \alpha \in A$, de modo que si $y \in x$, entonces $y \in \alpha$, porque α es inclusivo, y, por tanto, $y \in \bigcup A$. También E **Conecta** $\bigcup \mathbf{A}$, pues si x, y son elementos diferentes de $\bigcup A$, entonces $x \in \alpha \in A$ e $y \in \beta \in A$. α y β son comparables, así que o bien $\alpha \subseteq \beta$ o bien $\beta \subseteq \alpha$. Entonces x e y son miembros del más grande de los dos ordinales α y β, y como E **Conecta** α y E **Conecta** β, tenemos que $x \in y$ o bien $y \in x$, es decir, E **Conecta** $\bigcup A$. En conclusión, **Ord** $\bigcup A$.

$\bigcup A$ es el menor ordinal que es mayor o igual que cualquier elemento de A, es decir, es el *máximo* o el *límite* de los ordinales de A según haya o no un mayor elemento en A. Por tanto, utilizaremos «**Lim**» y «**Max**» con el mismo significado que $\bigcup$.

7.31. Df. **Lim** $(A) = \bigcup A$
Máx $(A) = \bigcup A$

7.4. Df. $x+1 = x \cup \{x\}$

Esto define la relación del siguiente para los números ordinales, como se ve en los teoremas 7.41 y 7.411.

7.41. $x+1 \in \Omega \leftrightarrow x \in \Omega$

Se prueba fácilmente.

7.411. $\neg \exists \beta (\alpha < \beta < \alpha + 1)$

Prueba: Si suponemos que $\alpha < \beta < \alpha + 1$, entonces $\beta \in \alpha + 1$, es decir, $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$, y, en consecuencia, $\beta \in \alpha$ o $\beta = \alpha$, esto es, $\beta \leqslant \alpha$.

Los números ordinales se clasifican en números ordinales del primer tipo y números ordinales del segundo tipo del modo siguiente:

7.42. Df. $x \in \Omega_1 \leftrightarrow \exists \alpha (x = \alpha + 1) \vee x = 0$

x es del primer tipo si es 0 o el siguiente de un número ordinal.

De otro modo x *es del segundo tipo.*

7.43. Df. $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$
7.44. Df. $1 = 0 + 1$
7.45. Df. $2 = 1 + 1$

Del mismo modo, $3 = 2 + 1$, etc. Evidentemente, tenemos que:

7.451. Si a es un conjunto de números ordinales, entonces el ordinal $(\bigcup a) + 1$ es un número ordinal mayor que cualquier elemento de a.

Se mostrará a continuación que es posible definir funciones sobre Ω mediante inducción transfinita, es decir, determinando $F(\alpha)$ por medio del comportamiento de F con los números ordinales menores que α. Como α es la clase de los ordinales menores que α, $F \upharpoonright \alpha$ es F restringida a los argumentos menores que α. Por tanto, la inducción tendrá la forma $F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$, siendo G una función conocida. Se precisa, pues, el siguiente teorema:

7.5. $\forall G \exists ! F\ (F\ \mathbf{Fn}\ \Omega \wedge \forall \alpha (F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)))$

Prueba: Construiremos F. En primer lugar, por el teorema de existencia M3, hay una clase K tal que:

$$f \in K \leftrightarrow \exists \beta\ (f\,\mathbf{Fn}\ \beta \wedge \forall \alpha (\alpha \in \beta \rightarrow f(\alpha) = G(f \upharpoonright \alpha))).$$

Ahora, sea $F = \bigcup K$. Si $f, g \in K$ y $f\,\mathbf{Fn}\ \beta \wedge g\ \mathbf{Fn}\ \gamma \wedge \beta \leqslant \gamma$ se sigue que $f = g \upharpoonright \beta$, porque para cada $\alpha \in \beta$, tanto f como g cumplen que $f(\alpha) = G\ (f \upharpoonright \alpha)$ (*), y esta ecuación determina una única f sobre β, como se ve por inducción sobre α. Esto significa que cualesquiera dos $f, g \in K$ coinciden en la parte común de sus dominios. Por tanto, F será una función, su dominio será la gran unión de los dominios de todas las $f \in K$ (es decir, $\mathscr{D}(F) = \bigcup Do[K]$) y F coincidirá con cada $f \in K$ en $\mathscr{D}(f)$. Para cada $\alpha \in \mathscr{D}(F)$ F satisface (*), porque $\alpha \in \mathscr{D}(F)$ implica que hay alguna $f \in K$ tal que $\alpha \in \mathscr{D}(f) \in \Omega$ y esta f satisface (*) en $\mathscr{D}(f)$ y además $f = F \upharpoonright \mathscr{D}(f)$. Por 7.3 $\mathscr{D}(F)$ es un ordinal, pero no puede ser un número ordinal α, pues si lo fuese F podría extenderse a una función H sobre $\alpha + 1$, en virtud de (*) y M6. Pero, en ese caso, y por 5.19, tendríamos que $\mathscr{C}H$, y

entonces $H \in K$, lo que implicaría que $\alpha+1 \subseteq \alpha$. La unicidad de F se prueba mediante inducción sobre α.

7.6. Df. Una *función ordinal* es una función G sobre un ordinal y con números ordinales como valores, es decir, $G\mathbf{Fn}\alpha$ (para algún α) o $G\mathbf{Fn}\Omega$, y $\mathscr{R}(G) \subseteq \Omega$.

7.61. Df. Se dice que una función ordinal G *es estrictamente monótona* si para cada α, $\beta \in \mathscr{D}(G)$: $\alpha < \beta \rightarrow G(\alpha) < G(\beta)$.

Por inducción se sigue que:

7.611. Si G es estrictamente monótona, entonces para cada $\alpha \in \mathscr{D}(G)$: $G(\alpha) \geqslant \alpha$.

De esto se sigue que dos ordinales diferentes X e Y nunca pueden ser isomorfos respecto a E.

7.62. $\mathbf{Ord}\ X \wedge \mathbf{Ord}\ Y \wedge H\ \mathbf{Isom}_{EE}(X, Y) \rightarrow X = Y \wedge H = I \upharpoonright X$.

Prueba: Por definición de isomorfismo tenemos que: si α, β son elementos de X tales que $\alpha \in \beta$, entonces $H(\alpha) \in H(\beta)$, es decir, H es estrictamente monótona, de modo que para todo $\alpha \in X$: $H(\alpha) \geqslant \alpha$, por 7.611. Igualmente $H^{-1}(H(\alpha)) \geqslant H(\alpha)$, es decir, $\alpha \geqslant H(\alpha)$ para cada $\alpha \in X$; de ello se sigue que para cada $\alpha \in X$, $\alpha = H(\alpha)$, y, lo que es lo mismo, $X = Y$ y $H = I \upharpoonright X$.

Como consecuencia de 7.62, una clase bien ordenada puede ser isomorfa a lo máximo a un ordinal. El siguiente teorema da las condiciones suficientes para que una clase bien ordenada sea isomorfa a un ordinal.

7.7. 1. Si **Pr** A, W **Bien-ordena** A y cualquier W-sección de A es un conjunto, entonces A es isomorfo a Ω respecto a W y E.

2. Si W **Bien-ordena** a , entonces a es isomorfo a algún número ordinal respecto a W y E.

Prueba de 1: Defínase por inducción $F(\alpha)$ como el primer elemento de A que aún no haya aparecido como valor de F, esto es, $F(\alpha)$ es el primer elemento de $A - \mathscr{R}(F \upharpoonright \alpha)$. Para probar, mediante 7.5, la existencia de F esta condición debe expresarse en la forma $F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$ (*). Para ello definimos G mediante la condición:

$$<y, x> \in G \leftrightarrow y \in A - \mathscr{R}(x) \wedge (A - \mathscr{R}(x)) \cap (W[\{y\}]) = 0,$$

y definimos F por medio de (*) y la condición $F\ \mathbf{Fn}\ \Omega$. Por 5.45 y 5.16 $A-\mathscr{R}(x)$ es una clase propia, así que $A-\mathscr{R}(x)\neq 0$ y, entonces, $G(x)\in A-\mathscr{R}(x)$ para cada conjunto x. En consecuencia, por (*), para cada α $F(\alpha)\in A-\mathscr{R}(F\restriction\alpha)$, con lo cual $\mathscr{R}(F)\subset A$. Como F es biunívoca y $\mathscr{R}(F)$ es una imagen biunívoca de la clase propia Ω, tenemos, por 5.44, que $\mathscr{R}(F)$ es también una clase propia. Pero como $\mathscr{R}(F)$ es una sección de A, por la hipótesis no puede ser una sección propia, es decir, $\mathscr{R}(F)=A$. Es fácil ver además que $\alpha<\beta \leftrightarrow F(\alpha)\,W\,F(\beta)$.

Prueba de 2: Constrúyase G y F exactamente como en la prueba de 1, pero sustituyendo A por a. Puede probarse entonces que para algún α $a-\mathscr{R}(F\restriction\alpha)=0$. Pues si suponemos que $\forall\alpha(a-\mathscr{R}(F\restriction\alpha)\neq 0)$, concluiremos, como antes, que $\mathscr{R}(F)\subseteq a$; y esto no es posible porque, como antes, $\mathscr{R}(F)$ será una clase propia, pero ahora a es un conjunto. Entonces $\exists\alpha(a-\mathscr{R}(F\restriction\alpha)=0)$. Ahora, si α es el menor de los ordinales que cumplen esto, $F\restriction\alpha$ establece el isomorfismo entre a y α. Del axioma de elección se sigue que

*7.71. Para cualquier conjunto a hay un número ordinal α y una función biunívoca g sobre α tal que $a=g[\alpha]$.

Prueba: Por el axioma *E*, el axioma de elección, hay una función C sobre V tal que $x\neq 0\rightarrow C(x)\in x$. Defínase F mediante el postulado $\forall\alpha(F(\alpha)=C(a-\mathscr{R}(F\restriction\alpha)))$ y $F\ \mathbf{Fn}\ \Omega$.' Si se define previamente G, usando M5, de modo que $G\ \mathbf{Fn}\ V$ y cumpla $G(x)=C(a-\mathscr{R}(x))$, entonces de 7.5 se sigue la existencia y unicidad de F. Como en la segunda parte de 7.7, se puede probar que hay un α tal que $a-\mathscr{R}(F\ \alpha)=0$. Si α es el menor ordinal de este tipo, puede tomarse g como $F\restriction\alpha$.

Es deseable asignar un buen orden a los pares ordenados de números ordinales:

7.8. Df. $(<\alpha,\beta>\ Le\ <\gamma,\delta>\leftrightarrow\beta<\delta\vee(\beta=\delta\wedge\alpha<\gamma))\wedge Le\subseteq(\Omega^2)^2$.

7.81. Df. $(<\alpha,\beta>\ R<\gamma,\delta>\ \leftrightarrow\mathbf{Max}\ \{\alpha,\beta\}<\mathbf{Max}\ \{\gamma,\delta\}\vee(\mathbf{Max}\ \{\alpha,\beta\}=\mathbf{Max}\ \{\gamma,\delta\}\wedge<\alpha,\beta>\ Le<\gamma,\delta>))\wedge R\subseteq(\Omega^2)^2$.

La existencia de una relación Le que satisfaga 7.8 se sigue de M4, pues la relación Le definida mediante:

$$<x, y> \in Le \leftrightarrow \exists\alpha\beta\gamma\delta(x = <\alpha, \beta> \wedge y = <\gamma, \delta> \wedge (\beta < \delta \vee (\beta = \delta \wedge \alpha < \gamma)))$$

satisface, evidentemente, 7.8. Del mismo modo para R. Ω^2 está bien ordenado por R de tal modo que:

7.811. Cualquier R-sección propia de Ω^2 es un conjunto.

Prueba: Considérese un par $<\mu, v>$ tal que $<\mu, v> R <\alpha, \beta>$. Tenemos que:

$$\mathbf{Max}\ \{\mu, v\} \leqslant \mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\} < (\mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\}) + 1\,.$$

Entonces, $\mu, v \in (\mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\}) + 1$, de modo que $<\mu, v> \in a$, donde $a = ((\mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\}) + 1)^2$. Por 5.18 a es un conjunto. Por tanto, la clase de todos los pares $<\mu, v>$ tales que $<\mu, v> R <\alpha, \beta>$ está contenida en el conjunto a, y por ello es a su vez un conjunto.

Ahora (puesto que por 7.17 y 5.43 Ω^2 es una clase propia), utilizando 7.7, tenemos que:

7.82. Ω^2 es isomorfo a Ω respecto a R y E. Llamemos P a este isomorfismo entre Ω^2 y Ω, esto es,

7.9. Df. $P\, \mathbf{Fn}\, \Omega^2 \wedge \mathscr{R}(P) = \Omega \wedge \forall\alpha\beta\gamma\delta\ (<\alpha, \beta>\ R\ <\gamma, \delta> \rightarrow P(<\alpha, \beta>) < P(<\gamma, \delta>))$

Prueba: Sea $\gamma = \mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\}$. Entonces, por 7.9, $P(<\alpha, \beta>) \geqslant P(<\gamma, 0>)$, pero como, por 7.9, $P(<\gamma, 0>)$ considerado como función de γ es estrictamente monótona, $\gamma \leqslant P(<\gamma, 0>)$, por 7.611, es decir, $P(<\alpha, \beta>) \geqslant \mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\}$.

4. Números cardinales

Podemos ahora continuar con la teoría de los cardinales. La mayoría de los teoremas y definiciones de este capítulo (excepto los referentes a cardinales finitos) dependen del axioma de elección, aunque se podría haber evitado su uso en muchos casos. Se dice que dos clases X e Y son equivalentes cuando hay

una correspondencia biunívoca entre los elementos de cada una, es decir,

8.1. Df. $X \sim Y \leftrightarrow \exists Z(\mathbf{Biun}\ Z \wedge \mathbf{Rel}\ Z \wedge \mathscr{D}(Z) = X \wedge \mathscr{R}(Z) = Y)$

Este relator no es normal[13]. El relator normal correspondiente es:

8.12. Df. $X \overset{*}{\sim} Y \leftrightarrow \exists z(\mathbf{Biun}\ z \wedge \mathbf{Rel}\ z \wedge \mathscr{D}(z) = X \wedge \mathscr{R}(z) = Y)$

8.121. $x \sim y \leftrightarrow x \overset{*}{\sim} y$

Prueba: Una clase Z que satisfaga el lado derecho de 8.1 para dos conjuntos X e Y es, por 5.19, un conjunto.

8.13. Df. $(<x, y> \in Eq \leftrightarrow x \sim y) \wedge \mathbf{Rel}\ Eq.$

El *cardinal de* X, denotado mediante $|X|$, se define por medio de el postulado[14]:

*8.2. Df. $x \sim |x| \wedge |x| \in \Omega \wedge \forall\alpha(\alpha < |x| \rightarrow \neg\ \alpha \sim x) \wedge (\mathbf{Pr}\ X \rightarrow |X| = \Omega)$

Por el teorema 7.71 es manifiesto que $|X|$ existe. La unicidad es inmediata. $|X|$ es un functor normal, pues $X \in |Y| \leftrightarrow X \in \Omega \wedge \forall\alpha (\alpha \overset{*}{\sim} Y \rightarrow X \in \alpha)$. Entonces, por M5, hay una función Nk sobre V tal que $Nk(x) = |x|$ para cualquier conjunto x.

*8.20. Df. $Nk(x) = |x| \wedge Nk\ \mathbf{Fn}\ V$

El cardinal de un conjunto se llama *número cardinal*, esto es, la clase K de los números cardinales se define:

*8.21. Df. $K = \mathscr{R}(Nk)$

*8.22. $K \subseteq \Omega$

Esto se deriva inmediatamente de 8.2 y 8.21.

Un número ordinal es un número cardinal si y sólo si no es equivalente a ningún ordinal menor, es decir, si es, en la terminología usual, un número inicial[15].

[13] Véase la nota 12.

[14] Nota añadida en la segunda edición: La Df. 8.2 para el caso de que $\mathbf{Pr}\, X$ se justifica por el resultado (concerniente a $\sim$) de J. v. Neumann citado en la nota 12.

[15] Este tratamiento de los cardinales se debe a v. Neumann. (Véase v. Neumann [1928], pág. 731.)

Los cinco teoremas siguientes son consecuencias inmediatas de la definición de los cardinales.

*8.23. $x \in K \leftrightarrow x = |x|$

*8.24. $|x| \sim x$

*8.25. $x \sim y \leftrightarrow |x| = |y|$

*8.26. $|\alpha| \leqslant \alpha$

*8.27. $Nk(Nk(x)) = Nk(x)$

*8.28. $x \subseteq y \rightarrow |x| \leqslant |y|$

Prueba: $y \sim |y|$, con lo cual existe un $z \subseteq |y|$ tal que $x \sim z$. z es un conjunto de números ordinales, por lo cual está bien ordenado por E, y, en consecuencia, es isomorfo a un cierto número ordinal β, por 7.7, es decir, hay un h tal que: h $\mathbf{Isom}_{EE}(\beta, z)$. Por 7.611 tenemos que para cada $\alpha \in \beta$ $\alpha \leqslant h(\alpha)$. Pero como, por otro lado, para todo $\alpha \in \beta$ $h(\alpha) \in z \subseteq |y|$ se sigue que $\alpha \in \beta \rightarrow \alpha \leqslant h(\alpha) \in |y|$, es decir, $\beta \subseteq |y|$. Y como $|\beta| = |z|$ se concluye que $|z| = |\beta| \leqslant \beta \leqslant |y|$.

El teorema de Schroeder-Bernstein surge como consecuencia. A saber, si $x \sim z \subseteq y$ y $y \sim u \subseteq x$, entonces, como $|x| = |z| \leqslant |y|$ y $|y| = |u| \leqslant |x|$, $|x| = |y|$. Esta prueba supone, sin embargo, el axioma de elección.

Omitimos la prueba de los tres siguientes teoremas.

*8.3. Para cada $\alpha > 1$: $|\alpha + 1| \leqslant |\alpha^2|$

*8.31. **Un** $A \rightarrow |A[x]| \leqslant |x|$

*8.32. $|\mathscr{P}(x)| > |x|$ (Teorema de Cantor)

*8.33. **Pr** K

Prueba: Si $a \subseteq K$, entonces, por 8.32, $|\mathscr{P}(\bigcup a)| > |\bigcup a|$. Pero, por 8.28 y 8.23, para cualquier $\alpha \in a$: $|\bigcup a| \geqslant \alpha$. Con lo cual hay un número cardinal mayor que cualquier elemento de a; en consecuencia, $a \neq K$, es decir, K no puede ser un conjunto.

Definimos ahora la *clase* ω *de los números naturales:*

8.4. Df. $x \in \omega \leftrightarrow x \cup \{x\} \subseteq \Omega_1$,

es decir, x es un número natural si es un número ordinal del primer tipo y todos los ordinales menores que él son también del primer tipo. Inmediatamente se sigue que:

8.41. $\alpha \in \omega \rightarrow \alpha + 1 \in \omega$ y $\alpha \in \omega \wedge \beta < \alpha \rightarrow \beta \in \omega$.

Df. n, m son variables de números naturales.

El principio de inducción es válido para los números naturales:

8.44. $0 \in A \wedge \forall n(n \in A \rightarrow n+1 \in A) \rightarrow \omega \subseteq A.$

Prueba: Si es falso que $\omega \subseteq A$, entonces debe existir un menor elemento m que no sea miembro de A. Esto lleva a una contradicción con la hipótesis, puesto que, por 8.4 y 7.42, o bien $m=0$ o bien $m=n+1$.

Se pueden definir inductivamente funciones sobre la clase de los números naturales:

8.45. $\forall aG\ \exists! F\ (F\ \mathbf{Fn}\ \omega \wedge F(0)=a \wedge \forall n\ (F(n+1)=G(F(n))))$

Esto se puede probar especificando G en 7.5 o por argumentos similares a los utilizados en la prueba de 7.5.

8.46. $m \neq n \rightarrow \neg\ m \sim n$

Se puede probar por inducción sobre los números naturales, puesto que

$$m+1 \sim n+1 \rightarrow m \sim n.$$

8.461. $\alpha \neq n \rightarrow \neg\ \alpha \sim n$

La prueba se efectúa por inducción sobre n, ya que $n+1 \sim \alpha \geqslant \omega$ implicaría que $n \sim \alpha$.

*8.47. $n \in K$

Se sigue de 8.46.

Una clase se llama *finita* cuando es equivalente a algún número natural; en otro caso es *infinita*, es decir,

8.48. Df. $\mathbf{Fin}\ x \leftrightarrow \exists \alpha(\alpha \in \omega \wedge \alpha \sim x)$,

8.49. Df. $\mathbf{Inf}\ x \leftrightarrow \neg\ \mathbf{Fin}\ x$

8.491. $\mathbf{Fin}\ x \wedge z \subseteq x \rightarrow \mathbf{Fin}\ z$

$\mathbf{Fin}\ x \wedge \mathbf{Fin}\ y \rightarrow \mathbf{Fin}\ x \cup y \wedge \mathbf{Fin}\ x \times y$

Esto se prueba por inducción sobre el número natural n equivalente a x.

8.492. $\mathbf{Fin}\ \alpha \leftrightarrow \alpha \in \omega$

Es consecuencia de 8.461.

8.5. **Ord** ω

Prueba: Como ω es una clase de números ordinales, E **Conecta** ω. Además, por la definición 8.4, cualquier elemento de un número natural es un número natural, es decir, **Incl** ω. Por tanto, **Ord** ω.

8.51. $\mathscr{C}\omega$.

Prueba: El axioma Cl (el axioma de infinitud) garantiza la existencia de un conjunto no vacío b tal que para cada $x \in b$ hay un $y \in b$ que contiene exactamente un elemento más que x; para ello defínase b como la clase de todos los subconjuntos de los elementos del conjunto a, cuya existencia postula el axioma Cl (b es un conjunto porque $b \subseteq \mathscr{P}(\bigcup a)$). Ahora considérese la clase c definida por $c = (\omega 1 Eq)$ $[b]$, esto es, la clase de los naturales equivalentes a los elementos de b. c es, por 5.1 y 8.46, un conjunto y, como puede probarse por inducción gracias a la mencionada propiedad de b, $\omega \subseteq c$.

8.52. $\omega \in \Omega_2$

Prueba: $x \in \omega \rightarrow x+1 \in \omega$, por 8.41. Si $\omega = \alpha + 1$, tendríamos, por 7.4, que $\alpha \in \omega$, y entonces $\alpha + 1 \in \omega$, es decir, $\omega \in \omega$, lo cual no es posible.

8.53. Hay por lo menos un número ordinal del segundo tipo.

Prueba: Por 8.52, ω es ese ordinal.

*8.54. Df. $K^* = K - \omega$

*8.55. $K^* \subseteq \Omega$

*8.56. K^* es isomorfo a Ω respecto a E.

Prueba: Como $\mathscr{C}\omega$, por 5,45 **Pr** K^*. Además, puesto que cada sección propia de K^* es generada por algún $\alpha \in K^*$, está incluida en ese α y, por consiguiente, es un conjunto. 7.7 proporciona entonces el resultado. El isomorfismo entre Ω y K^* se denota mediante $\aleph$, es decir,

*8.57. Df. $\aleph$ $\mathbf{Isom}_{EE}(\Omega, K^*)$.

Se sigue entonces que:

*8.58. $\aleph(0)=\omega$

puesto que, por 8.461, $\omega\in K$. Se define también $\aleph_\gamma$ y ω_γ:

*8.59. Df. $\aleph_\gamma=\aleph(\gamma)=\omega_\gamma$

*8.62. $|(\aleph_\alpha)^2|=\aleph_\alpha$

Prueba: Supuesto que γ sea el menor de los ordinales que cumplen que $|(\aleph_\gamma)^2|\neq\aleph_\gamma$, probaremos que $(\omega_\gamma)^2\sim\omega_\gamma$. Para ello, gracias al teorema de Schroeder-Bernstein, es suficiente probar que $P[(\omega_\gamma)^2]\subseteq\omega_\gamma$, es decir, para cada α, $\beta<\omega_\gamma$: $P(<\alpha, \beta>)<\omega_\gamma$, siendo P la función definida en 7.9. Como para cada δ: $\delta<\omega_\gamma\leftrightarrow|\delta|<\omega_\gamma$, bastará probar que para todo α, $\beta<\omega_\gamma$: $|P(<\alpha, \beta>)|<\omega_\gamma$. Ahora bien, $|P(<\alpha, \beta>)|$ es la cardinalidad del conjunto de los ordinales menores que $P(<\alpha, \beta>)$. P, por su definición (7.9), pone en correspondencia biunívocamente este conjunto con el conjunto b de los pares que preceden a $<\alpha, \beta>$ en el orden R. De aquí se sigue que $|b|=|P(<\alpha, \beta>)|$, pero (como se vio en la prueba de 7.811), $b\subset(\mu+1)^2$, donde $\mu=\mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\}$.

Ahora podemos distinguir dos casos:

1. μ es finito. Entonces, por 8.491, $|(\mu+1)^2|<\omega$. Por tanto, en este caso, $|b|\leqslant|(\mu+1)^2|\quad\omega\leqslant\omega_\gamma$.

2. μ es infinito. Entonces, como por el supuesto $\mu<\omega_\gamma$, hay un cierto $\delta<\gamma$ tal que $|\mu|=\omega_\delta$. Con lo cual, por el supuesto inductivo, $|\mu^2|=|\mu|$. De aquí que (usando *8.3) también en este caso $|b|\leqslant|(\mu+1)^2|\leqslant|(\mu^2)^2|=|\mu|<\omega_\gamma$.

Resulta entonces que:

*8.621. Para cualquier conjunto infinito x: $|x^2|=|x|$, y por tanto,

*8.63. $\mathbf{Inf}\ x\wedge y\neq 0\rightarrow|x\times y|=|x\cup y|=\mathbf{Max}\ \{|x|, |y|\}$.

*8.64. Si para cada $y\in b$ $|F(y)|\leqslant|a|$, entonces $|\bigcup F[b]|\leqslant|a\times b|$.

Las pruebas de estos teoremas sobre cardinales no se incluyen porque no difieren de las pruebas usuales.

8.7. Df. *A está clausurado respecto a T* si $T[A]\subseteq A$.

8.71. Df. *A está clausurado respecto a la relación triádica S* si $S[A^2] \subseteq A$.

8.72. Y es la clausura de X respecto a las relaciones $T_1, \dots, T_k$ y respecto a las relaciones triádicas $S_1, \dots, S_n$ si Y es la menor clase que incluye a X y que está clausurada respecto a las relaciones T_i y respecto a las relaciones triádicas S_i.

La existencia de esta clase se precisará únicamente bajo las siguientes condiciones:

*8.73. Si $\mathscr{C}X$ y las relaciones $T_1, \dots, T_k$ y las $S_1, \dots, S_n$ son unívocas, entonces existe la clausura Y de X y es un conjunto; si, además, X es infinito, entonces $|Y| = |X|$.

Prueba: Defínase G **Fn** V del siguiente modo:

$$G(x) = x \cup T_1[x] \cup \dots \cup T_k[x] \cup S_1[x^2] \cup \dots \cup S_n[x^2].$$

Como el lado derecho es normal, y por 5.1, 5.13 y 5.18 es un conjunto para cualquier conjunto x, tenemos que, por M5, G existe. Ahora, mediante 8.45, definimos f **Fn** ω del siguiente modo:

$$f(0) = x \wedge f(n+1) = G(f(n))$$

Considérese ahora $\bigcup f[\omega]$; se trata de un conjunto y satisface las exigencias de la definición 8.72. Además, por 8.31, 8.621 y 8.63, tenemos que para cada conjunto infinito y: $|\bigcup y| = |y|$. Por tanto, si x es infinito, entonces $|f(n)| = |f(0)| = |x|$, lo cual se prueba por inducción completa sobre n. De aquí que, por 8.64 y 8.63, $|\bigcup f[\omega]| \leqslant |x \times \omega| = \mathbf{Max}\ \{|x|, |\omega|\} = |x|$, y por 8.28, $|\bigcup f[\omega]| \geqslant |f(0)| = |x|$.

5. El modelo Δ

Las clases y conjuntos del modelo Δ formarán una cierta subfamilia de las clases y conjuntos del sistema original Σ, y la relación ∈ del modelo Δ será la relación original ∈ restringida a las clases y conjuntos del modelo Δ. Llamamos *constructibles* a las clases y conjuntos de Δ, y denotamos la noción de clase constructible mediante $\mathscr{L}$ y la clase de los conjuntos constructi-

bles mediante L. Conjuntos constructibles son aquellos conjuntos obtenibles mediante repetidas aplicaciones de las funciones definidas por medio de los axiomas A4, B1-8, aunque modificadas de tal modo que proporcionen conjuntos cuando se apliquen a conjuntos. Además, en determinados niveles de este proceso de generación, el conjunto de todos los conjuntos ya obtenidos será considerado como un nuevo conjunto constructible. Esto permite que el proceso de generación continúe hasta el infinito. Los axiomas citados conducen a las ocho siguientes operaciones binarias $\mathscr{F}_1, ..., \mathscr{F}_8$, llamadas operaciones fundamentales:

9.1. Df. $\mathscr{F}_1(X, Y)=\{X, Y\}$
$\mathscr{F}_2(X, Y)=E\cap X$
$\mathscr{F}_3(X, Y)=X-Y$
$\mathscr{F}_4(X, Y)=X\restriction Y$ (es decir, $=X\cap(V\times Y)$)
$\mathscr{F}_5(X, Y)=X\cap\mathscr{D}(Y)$
$\mathscr{F}_6(X, Y)=X\cap Y^{-1}$
$\mathscr{F}_7(X, Y)=X\cap\mathbf{Inv}_2(Y)$
$\mathscr{F}_8(X, Y)=X\cap\mathbf{Inv}_3(Y)$

El factor X se añade en $\mathscr{F}_2, ..., \mathscr{F}_8$ por razones que se verán más tarde (teorema 9.5). Es omitida la operación de intersección (justificada por el axioma B2), porque $X\cap Y=X-(X-Y)$. Gracias a 4.92-4.96, $\mathscr{F}_4, ..., \mathscr{F}_8$ pueden expresarse de un modo diferente:

9.1. $\mathscr{F}_4(X, Y)=X\cap P_2^{-1}[Y]$
$\mathscr{F}_5(X, Y)=X\cap P_2[Y]$
$\mathscr{F}_6(X, Y)=X\cap P_3[Y]$
$\mathscr{F}_7(X, Y)=X\cap P_4[Y]$
$\mathscr{F}_8(X, Y)=X\cap P_5[Y]$

En otras palabras,

9.12. $\mathscr{F}_n(X, Y)=X\cap Q_n[Y]$; $n=4, ..., 8$,

donde Q_n se define del siguiente modo:

9.14. $Q_4=P_2^{-1}$, $Q_5=P_2$, $Q_6=P_3$, $Q_7=P_4$, $Q_8=P_5$.

Todas las operaciones fundamentales proporcionan conjuntos cuando se aplican a conjuntos, como puede verse gracias al teorema 5.11.

Ahora consideramos la clase $9 \times \Omega^2$ (es decir, la clase de las tríadas $< n, \alpha, \beta>$ con $n<9$) y definimos para ella la siguiente relación S de buen orden:

9.2. Df. $(\mu, v<9 \rightarrow (<\mu, \alpha, \beta> S <v, \gamma, \delta> \leftrightarrow <\alpha, \beta> R <\gamma, \delta> \vee (<\alpha, \beta> = <\gamma, \delta> \wedge \mu<v))) \wedge S \subseteq (9 \times \Omega^2)^2$,

donde R es la relación definida en 7.81. Respecto a la existencia de S, véase la definición 7.8. Como

$$<n, \alpha, \beta>S<m, \gamma, \delta> \rightarrow <\alpha, \beta>R<\gamma, \delta> \vee <\alpha, \beta> = <\gamma, \delta>,$$

se sigue de 7.811 y 5.18 que cualquier S-sección de $9 \times \Omega^2$ es un conjunto. Pero, por 5.43, $9 \times \Omega^2$ no es un conjunto. Por ello, en virtud de 7.7, $9 \times \Omega^2$ es isomorfo a Ω respecto a S y E, es decir, hay una J que satisface el siguiente postulado:

9.21. Df. J **Fn** $9 \times \Omega^2 \wedge \mathscr{R}(J)=\Omega \wedge \forall \mu v \alpha \beta \gamma \delta\, (\mu,\ v<9 \rightarrow (<\mu, \alpha, \beta>S <v, \gamma, \delta> \rightarrow J(<\mu, \alpha, \beta>) < J(<v, \gamma, \delta>)))$.

Definimos ahora nueve funciones $J_0, ..., J_8$ sobre Ω^2:

9.22. Df. $J_0(<\alpha, \beta>) = J(<0, \alpha, \beta>) \wedge J_0\ Fn\ \Omega^2$

....

$J_8(<\alpha, \beta>) = J(<8, \alpha, \beta>) \wedge J_8\ Fn\ \Omega^2$.

Evidentemente, tenemos que:

9.23. Los $\mathscr{R}(J_n)$, $n=0, ..., 8$, son mutuamente exclusivos, y su unión es Ω. (Es fácil ver, aunque aquí no se ha de usar, que los $\mathscr{R}(J_n)$ son las clases de congruencia mod. 9 de Ω y que $J_n(<\alpha, \beta>)=9 \cdot P(<\alpha, \beta>)+n$, donde $+$ y $\cdot$ denotan la adición y multiplicación aritmética de ordinales.)

Por definición de J, para cada γ existe una única tríada $<n, \alpha, \beta>$ tal que $\gamma=J(<n, \alpha, \beta>)$. De aquí que existan dos funciones H_1 y H_2 sobre Ω tales que: $H_1(J_n(<\alpha, \beta>))=\alpha$ y

$H_2(J_n(<\alpha, \beta>))=\beta$ para cualquier $n<9$. H_1 y H_2 quedan definidas por:

9.24. Df.

1. $(<\alpha, \gamma> \in H_1 \leftrightarrow \exists \mu\beta(\mu<9 \wedge \gamma=J(<\mu, \alpha, \beta>))) \wedge H_1 \subseteq \Omega^2$
2. $(<\beta, \gamma> \in H_2 \leftrightarrow \exists \mu\alpha(\mu<9 \wedge \gamma=J(<\mu, \alpha, \beta>))) \wedge H_2 \subseteq \Omega^2$

Para las J_n y H_n tenemos los siguientes teoremas:

9.25. $J_n(<\alpha, \beta>) \geqslant \mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\}$,
$J_n(<\alpha, \beta>) > \mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\}$ para $n \neq 0$
$H_1(\alpha) \leqslant \alpha,\ H_2(\alpha) \leqslant \alpha$
$H_1(\alpha) < \alpha,\ H_2(\alpha) < \alpha$ para $\alpha \notin \mathscr{R}(J_0)$

Prueba: Sea $\gamma=\mathbf{Max}\{\alpha, \beta\}$. Por la definición 9.21 tenemos que $J_0(<\alpha, \beta>) \geqslant J_0(<\gamma, 0>)$. Por 7.611 $J_0(<\gamma, 0>) \geqslant \gamma$ y, por la definición 9.21, para $n \neq 0$ $J_n(<\alpha, \beta>) \geqslant J_0(<\alpha, \beta>)$. Reuniendo las tres últimas desigualdades obtenemos que (para $n \neq 0$):

$$J_n(<\alpha, \beta>) > J_0(<\alpha, \beta>) \geqslant J_0(<\gamma, 0>) \geqslant \gamma,$$

y de aquí las dos primeras afirmaciones de 9.25. Las dos últimas expresan los mismos hechos en términos de H_1 y H_2.

*9.26. $\alpha, \beta < \omega_\gamma \rightarrow J_n(<\alpha, \beta>) < \omega_\gamma$

Prueba: Por la definición 9.21, J hace corresponder biunívocamente el conjunto b de tríadas que preceden a $<n, \alpha, \beta>$ en el orden S con el conjunto de ordinales menores que $J_n(<\alpha, \beta>)$. Por tanto, $J_n(<\alpha, \beta>) \sim b$. Pero, por 9.2 y 7.81, $b \subseteq 9 \times ((\mathbf{Max}\{\alpha, \beta\})+1)^2$. De aquí el teorema, por 8.491 ó 8.63, según sea $\gamma=0$, o bien $\gamma>0$ (utilizando 8.492 en el primer caso). Obsérvese que para el caso $\gamma=0$ no se usa el axioma de elección.

*9.27. $\omega_\alpha \in \mathscr{R}(J_0)$

Prueba: Por 9.25 $\omega_\alpha \leqslant J(<0, \omega_\alpha, 0>)$, pero no $\omega_\alpha < J(<0, \omega_\alpha, 0>)$, porque, de otro modo, tendríamos que para alguna cierta tríada $<n, \gamma, \delta>$ que preceda a $<0, \omega_\alpha, 0>$ en el orden S $\omega_\alpha = J(<n, \gamma, \delta>)$. Y como $<n, \gamma, \delta>$ S $<0, \omega_\alpha, 0>$ implica que $\gamma, \delta < \omega_\alpha$, tendríamos, por 9.26, que $J(<n, \gamma, \delta>) < \omega_\alpha$. Por todo ello, $\omega_\alpha = J_0(<\omega_\alpha, 0>)$, es decir, $\omega_\alpha \in \mathscr{R}(J_0)$. Para el caso $\alpha = 0$ no se precisa el axioma de elección en el argumento.

Ahora definimos, mediante inducción transfinita, una función F sobre Ω (la letra F se usará en adelante únicamente como constante. Una observación similar es aplicable a R, S y C, definidas respectivamente en 7.81, 9.2 y 11.81) con los siguientes postulados:

9.3. Df. $\alpha \in \mathscr{R}(J_0) \rightarrow F(\alpha) = \mathscr{R}(F \restriction \alpha)$
$\alpha \in \mathscr{R}(J_1) \rightarrow F(\alpha) = \mathscr{F}_1(F(H_1(\alpha)), F(H_2(\alpha)))$
....
$\alpha \in \mathscr{R}(J_8) \rightarrow F(\alpha) = \mathscr{F}_8(F(H_1(\alpha)), F(H_2(\alpha)))$
$F \; Fn \; \Omega$.

Para probar, por medio de 7.5, la existencia de F es necesario definir previamente una función G sobre V con los siguientes postulados: si $\mathscr{D}(x) \in \mathscr{R}(J_0)$, entonces $G(x) = \mathscr{R}(x)$; si $\mathscr{D}(x) \in \mathscr{R}(J_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 8$, entonces $G(x) = \mathscr{F}_n(x(H_1(\mathscr{D}(x))), x(H_2(\mathscr{D}(x))))$, y $G(x) = 0$ en cualquier otro caso. Como todos los símbolos que aparecen son normales (véase la pág. 286), por M6 G existe. Por 7.5 hay una F sobre Ω que cumple $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$, lo que significa que F satisface 9.3, como se puede observar en la siguiente prueba: Supongamos que $\alpha \in \mathscr{R}(J_n)$ con $n \neq 0$. Entonces $\mathscr{D}(F \restriction \alpha) \in \mathscr{R}(J_n)$, ya que $\mathscr{D}(F \restriction \alpha) = \alpha$. En consecuencia, $G(F \restriction \alpha) = \mathscr{F}_n$ $(F \restriction \alpha(H_1(\alpha)), F \restriction \alpha(H_2(\alpha)))$. Por 9.25 $H_1(\alpha) < \alpha$ y $H_2(\alpha) < \alpha$, y además, si $\beta < \alpha$, entonces $F \restriction \alpha(\beta) = F(\beta)$, de modo que $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha) = \mathscr{F}_n(F(H_1(\alpha)), F(H_2(\alpha)))$. Similarmente, si $\alpha \in \mathscr{R}(J_0)$, entonces $\mathscr{D}(F \restriction \alpha) \in \mathscr{R}(J_0)$, así que $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha) = \mathscr{R}(F \restriction \alpha)$.

Consiguientemente, F existe, y se puede probar por inducción que está unívocamente determinada. Los siguientes resultados son consecuencias de 9.3, y se obtienen sustituyendo α por $J_n(<\beta, \gamma>)$ en cada caso en la línea n de 9.3 y utilizando las ecuaciones $H_1(J_n(<\alpha, \beta>)) = \alpha$, $H_2(J_n(<\alpha, \beta>)) = \beta$, que se derivan de la definición 9.24.

9.31. $F(J_1(<\beta, \gamma>)) = \{F(\beta), F(\gamma)\}$
9.32. $F(J_2(<\beta, \gamma>)) = E \cap F(\beta)$
9.33. $F(J_3(<\beta, \gamma>)) = F(\beta) - F(\gamma)$
9.34. $F(J_n(<\beta, \gamma>)) = F(\beta) \cap Q_n[F(\gamma)]$; $n = 4, 5, \ldots, 8$.
9.35. $\alpha \in \mathscr{R}(J_0) \rightarrow F(\alpha) = F[\alpha]$

Este último grupo de teoremas muestra en qué modo F refleja las nueve funciones fundamentales de 9.1.

Se dice que un conjunto x es *constructible* si hay un α tal que $x=F(\alpha)$. La clase de los conjuntos constructibles se denota mediante L, esto es,

9.4. Df. $L=\mathscr{R}(F)$.

Una clase A es constructible cuando todos sus elementos son conjuntos constructibles, y la intersección de A con cualquier conjunto constructible es, a su vez, un conjunto constructible, es decir,

9.41. Df. $\mathscr{L}A \leftrightarrow A \subseteq L \wedge \forall x(x \in L \rightarrow A \cap x \in L)$.

Df. $\bar{x}$, ..., $\bar{z}$, se usarán como variables de conjuntos constructibles, y $\bar{X}$, ..., $\bar{Z}$, como variables de clases constructibles.

9.42. Df. El menor α tal que $x=F(\alpha)$ se llama el *orden de* x, y se denota mediante $Od(x)$, esto es,

9.421. Df. $(<y, x> \in Od \leftrightarrow <x, y> \in F \wedge \forall z(z \in y \rightarrow \neg <x, z> \in F)) \wedge Od \subseteq V^2$.

9.5. **Incl** $F[\alpha]$.

Es suficiente probar que $F(\alpha) \subseteq F[\alpha]$, es decir, que todos los elementos de un conjunto constructible aparecen antes que el conjunto mismo.

Prueba: Sea α el primer ordinal que no cumpla que $F(\alpha) \subseteq F[\alpha]$. Si $\alpha \in \mathscr{R}(J_0)$, entonces $F(\alpha)=F[\alpha]$, y por tanto $F(\alpha) \subseteq F[\alpha]$. Si $\alpha \in \mathscr{R}(J_n)$ con $n \neq 0$, entonces $\alpha=J_n(<\beta, \gamma>)$, con $n \neq 0$. Por los teoremas 9.32, 9.33 y 9.34, si $n>1$, entonces $F(\alpha) \subseteq F(\beta)$. Pero $\beta<\alpha$, por 9.25, de modo que el teorema vale para β, es decir, $F(\beta) \subseteq F[\beta]$. De aquí que $F(\alpha) \subseteq F[\beta]$. De nuevo, como $\beta<\alpha$, $F[\beta] \subseteq F[\alpha]$, y se concluye que $F(\alpha) \subseteq F[\alpha]$. Si $n=1$, entonces, por 9.31, $F(\alpha)=\{F(\beta), F(\gamma)\}$, donde $\alpha=J_1(<\beta, \gamma>)$. Por 9.25 tenemos que $\beta, \gamma<\alpha$. Entonces $F(\beta) \in F[\alpha]$ y $F(\gamma) \in F[\alpha]$, con lo cual $\{F(\beta), F(\gamma)\} \subseteq F[\alpha]$, es decir, $F(\alpha) \subseteq F[\alpha]$.

9.51. **Incl** L, esto es, cualquier elemento de un conjunto constructible es constructible. (Por la definición 9.41 lo mismo es cierto para las clases constructibles.)

Prueba: Sea $x \in L$ y sea $\alpha = Od(x)$, de modo que $F(\alpha) = x$. Por 9.5 $x \subseteq F[\alpha]$. Por tanto, $x \subseteq L$, puesto que $F[\alpha] \subseteq L$.

El siguiente enunciado se sigue de 9.5:

9.52. Si $x \in y$ y $x, y \in L$, entonces $Od(x) < Od(y)$. En otras palabras, $x \in F(\alpha) \rightarrow Od(x) < \alpha$.

$\mathscr{F}_1, ..., \mathscr{F}_8$ proporcionan conjuntos constructibles cuando se aplican a conjuntos constructibles, es decir,

9.6. $\mathscr{F}_n(\bar{x}, \bar{y}) \in L$; $n = 1, ..., 8$.

Prueba: Como existen β, γ tales que $\bar{x} = F(\beta)$ e $\bar{y} = F(\gamma)$, 9.31-9.34 justifican el teorema.

9.61. $\bar{x} \cap \bar{y} \in L$

Prueba: $\bar{x} \cap \bar{y} = \bar{x} - (\bar{x} - \bar{y})$, y entonces de 9.6 para $n = 3$ se sigue el teorema.

*9.611. $Od(\bar{x}) < \omega_\alpha \wedge Od(\bar{y}) < \omega_\alpha \rightarrow Od(\bar{x} \cap \bar{y}) < \omega_\alpha$.

Se prueba por 9.26.

9.62. $x, y \in L \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in L$ y $x, y, z \in L \leftrightarrow \langle x, y, z \rangle \in L$

Prueba: Un sentido del bicondicional resulta de expresar $\langle x, y \rangle$ como $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ y aplicar 9.6. El otro sentido es una consecuencia de 9.51.

9.621. $\langle x, y \rangle \in L \leftrightarrow \langle y, x \rangle \in L$
$\langle x, y, z \rangle \in L \leftrightarrow \langle z, x, y \rangle \in L \leftrightarrow \langle x, z, y \rangle \in L$

(Se siguen inmediatamente de 9.62).

9.623. $Q_n(\bar{x}) \in L$ para $n = 5, 6, ..., 8$.

(Se sigue de 9.62 y 9.621.)

9.63. $x \subseteq L \rightarrow \exists \bar{y}(x \subseteq \bar{y})$

Prueba: Consideremos $Od[x]$, que es un conjunto de ordinales; por 7.451 existe un ordinal α mayor que cualquier elemento de $Od[x]$, es decir, tal que $Od[x] \subseteq \alpha$. Además, se puede encontrar un tal α que cumpla la restricción adicional de que $\alpha \in \mathscr{R}(J_0)$ (por ejemplo, tomando $J_0(\langle 0, \alpha \rangle)$ en vez de α, ya que, por 9.25, $J_0(\langle 0\alpha \rangle) \geqslant \alpha$), y entonces, por 9.35, $F(\alpha) = F[\alpha]$. Como x

$\subseteq F[\alpha]$, tenemos que $x \subseteq F(\alpha)$, y $F(\alpha)$ es un conjunto constructible. Se sigue entonces que una clase constructible que sea un conjunto es un conjunto constructible, es decir,

9.64. $\mathscr{C}X \rightarrow X \in L$

Prueba: Por 9.41 y 9.63, $\bar{X}$ está contenida en un cierto $\bar{y}$. En consecuencia, $\bar{X} \cap \bar{y} = \bar{X}$, y $\bar{X} \cap \bar{y}$ es, por 9.41, un conjunto constructible.

9.65. $\mathscr{L}\bar{x}$

Prueba: Por 9.51 $\bar{x} \subseteq L$, y por 9.61 para cualquier $\bar{y}: \bar{x} \cap \bar{y} \in L$.

9.66. $\bar{x} \cup \bar{y} \in L$

Prueba: Por 9.51 y 9.63 hay un $\bar{z}$ tal que $\bar{x} \cup \bar{y} \subseteq \bar{z}$. Como $\bar{x} \cup \bar{y} = \bar{z} - ((\bar{z} - \bar{x}) - \bar{y})$, de 9.6 se sigue el teorema.

9.8. $0 \in L$

Prueba: $0 = \bar{x} - \bar{x}$, y entonces, por 9.6, es constructible.

9.81. $\mathscr{L}L$

Prueba: $L \subseteq L$ y, en virtud de 9.51, $\bar{x} \cap L = \bar{x}$, de modo que $\bar{x} \cap L \in L$. Entonces, por 9.41, $\mathscr{L}L$.

9.82. $\mathscr{L}E \cap L$

Prueba: $E \cap L \subseteq L$. Además, como $X \cap E$ es una operación fundamental, por 9.6 $\bar{x} \cap E \in L$. Y como $\bar{x} \cap E = \bar{x} \cap E \cap L$, puesto que $\bar{x} \subseteq L$, tenemos que $\bar{x} \cap E \cap L \in L$. De aquí que, por 9.41, $\mathscr{L}E \cap L$.

9.83. $\mathscr{L}\bar{A} - \bar{B}$

Prueba: $\bar{A} - \bar{B} \subseteq L$. $(\bar{x} \cap \bar{A}) - (\bar{x} \cap \bar{B})$ es, por 9.41 y 9.6, constructible, y como $(\bar{x} \cap \bar{A}) - (\bar{x} \cap \bar{B}) = \bar{x} \cap (\bar{A} - \bar{B})$, se sigue que $\bar{x} \cap (\bar{A} - \bar{B}) \in L$, así que, por 9.41, $\mathscr{L}\bar{A} - \bar{B}$.
Similarmente:

9.84. $\mathscr{L}\bar{A} \cap \bar{B}$

y

9.85. $\mathscr{L}\bar{A} \cup \bar{B}$

9.86. $\mathscr{L}Q_n[\bar{A}]$; $n = 5, \ldots, 8$

y

9.87. $\mathscr{L} L \cap Q_4[\bar{A}]$

Los dos últimos teoremas se prueban del siguiente modo: Q_5, ..., Q_8, por 9.623, proporcionan conjuntos constructibles cuando se aplican a conjuntos constructibles, de modo que $Q_n[\bar{A}] \subseteq L$ para $n=5$, ..., 8. En vistas a probar que para $n=4$, ..., 8 $\bar{x} \cap Q_n[\bar{A}] \in L$, considérese un arbitrario $y \in \bar{x} \cap Q_n[\bar{A}]$ con $n=4$, ..., 8. y es una imagen en Q_n de algún elemento de $\bar{A}$; sea y' el menor elemento de $\bar{A}$ del cual y es imagen. La totalidad de estos y' para cada uno de los elementos y de $\bar{x} \cap Q_n[\bar{A}]$ es un conjunto u de conjuntos constructibles que cumple $u \subseteq \bar{A}$. Por 9.63 tenemos que hay un $\bar{z}$ tal que $u \subseteq \bar{z}$. Este $\bar{z}$ puede ser especificado de modo que $\bar{z} \subseteq \bar{A}$, tomando simplemente $\bar{z} \cap \bar{A}$. Por tanto, podemos concluir que $u \subseteq \bar{z} \subseteq \bar{A}$. En consecuencia, por 4.86, $\bar{x} \cap Q_n[\bar{z}] \subseteq \bar{x} \cap Q_n[\bar{A}]$, y como cada elemento de $\bar{x} \cap Q_n[\bar{A}]$ tiene un original en u y por ello en $\bar{z}$, también $\bar{x} \cap Q_n[\bar{A}] \subseteq \bar{x} \cap Q_n[\bar{z}]$. Consiguientemente, $\bar{x} \cap Q_n[\bar{A}] = \bar{x} \cap Q_n[\bar{z}]$ y, por 9.6, $\bar{x} \cap Q_n[\bar{z}] \in L$.

Los teoremas 9.86 y 9.87 toman, gracias a los teoremas 4.92-4.96, las siguientes tres formas:

9.871. $\mathscr{L} \mathscr{D}(\bar{A})$

9.872. $\mathscr{L}\,\mathbf{Inv}_n(\bar{A})$

9.873. $\mathscr{L} L \cap (V \times \bar{A})$

9.88. $\mathscr{L} \bar{A} \times \bar{B}$

Prueba: Como, por 9.62, $\bar{A} \times \bar{B} \subseteq L$, por 4.871, $\bar{A} \times \bar{B} = (V \times \bar{B}) \cap (\bar{A} \times V) = L \cap (V \times \bar{B}) \cap L \cap (\bar{A} \times V)$. Además, por 9.873 y 9.872, $\mathscr{L} L \cap (V \times \bar{B})$ y $\mathscr{L} L \cap (\bar{A} \times V)$. De aquí que, por 9.84, $\mathscr{L} \bar{A} \times \bar{B}$.

9.89. $\mathscr{L} \mathscr{R}(\bar{A})$

Prueba: $\mathscr{R}(\bar{A}) = \mathscr{D}(A^{-1})$, por lo cual el teorema se sigue de 9.871 y 9.872.

9.90. $\mathscr{L} \bar{A} \upharpoonright \bar{B}$

Prueba: $\overline{A} \upharpoonright \overline{B} = \overline{A} \cap (V \times \overline{B}) = \overline{A} \cap L \cap (V \times \overline{B})$. De aquí, por 9.873 y 9.84, se sigue el teorema.

9.91. $\mathscr{L}\overline{A}[\overline{B}]$

Prueba: $\overline{A}[\overline{B}] = \mathscr{R}(\overline{A} \upharpoonright \overline{B})$, de donde, por 9.89 y 9.90, se sigue el teorema.

9.92. $\mathscr{L}\{\overline{X}, \overline{Y}\}$

Prueba: Por la definición 3.1, $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ es 0 o $\{\overline{X}\}$ o $\{\overline{Y}\}$ o $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$, donde las variables que aparecen dentro de los corchetes son variables de conjuntos. Entonces, por 9.6, 9.65 y 9.8, se sigue el teorema.

No todas las operaciones sobre clases constructibles dan necesariamente clases constructibles. Por ejemplo, no se puede probar que $\mathscr{L}\mathscr{P}(X)$.

Considérese ahora el *modelo* Δ obtenido del siguiente modo:

1. Las clases de Δ son las clases constructibles.

2. Los conjuntos de Δ son los conjuntos constructibles.

3. La relación de pertenencia de Δ, $\in_l$, es la relación $\in$ restringida a las clases constructibles, es decir, $\overline{X} \in_l \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X} \in \overline{Y}$.

Los functores, los relatores y las constantes definidos hasta el momento pueden ser *relativizados* al modelo Δ reemplazando en su definición o postulado definicional las variables X, Y, ..., por $\overline{X}$, $\overline{Y}$, ...; las variables x, y, ..., por $\bar{x}$, $\bar{y}$, ...; $\in$ por $\in_l$ y los conceptos y variables previamente definidos por sus relativizaciones, dejando únicamente intactos los signos lógicos (en especial también $=$, considerado como signo lógico). La relativización de una variable **x** es otra variable cuyo ámbito de variabilidad se obtiene relativizando el relator que define el ámbito de variabilidad de **x**. Obsérvese que la relativización de una constante o un functor no tiene porqué existir *a priori*, ya que puede darse el caso de que el teorema que establece su existencia y unicidad (véase la pág. 228) no valga en Δ, y además, la relativización de un concepto dependerá de la definición particular que escojamos, ya que definiciones equivalentes no son necesariamente equivalentes en Δ. (Sin embargo, en cuanto haya sido probado que los axiomas de Σ son válidos en Δ, podremos afirmar que siempre

existe la relativización y que no depende de una definición particular.) Si existe la relativización de una constante **A**, un functor **G**, un relator **R**, o una variable **x** (lo que presupone que existe la relativización de cualquier signo que aparezca en su definición), la denotaremos por medio de $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{G}_l$, $\mathbf{R}_l$ y $\mathbf{x}_l$, respectivamente (de aquí que x_l y X_l tengan el mismo ámbito de variabilidad que $\bar{x}$ y $\bar{X}$). $\mathbf{G}_l$ y $\mathbf{R}_l$ se definen únicamente para argumentos que sean clases constructibles, de modo que tenemos el siguiente teorema:

10.1. Si $\mathbf{A}_l$ y $\mathbf{G}_l$ existen, entonces $\mathbf{A}_l$ es constructible y para cada $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$: $\mathbf{G}_l(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ es constructible.

Las constantes, los relatores y los functores relativizados son, evidentemente, al mismo tiempo constantes, relatores y functores del sistema Σ, si se atiende a la exigencia de la página 227 de que estén definidos para cualquier clase que pueda aparecer como argumento. Ello se consigue, por ejemplo, estipulando que si $X_1, \ldots, X_n$ no son todas constructibles, entonces $\mathbf{G}_l(X_1, \ldots, X_n)=0$ y $\mathbf{R}_l X_1 \ldots X_n$ es falso.

10. Df. Se dice que una constante **A**, un functor **G** o un relator **R** es *absoluto* si existen respectivamente $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{G}_l$ y $\mathbf{R}_l$ y resulta además que $\mathbf{A}_l = \mathbf{A}$, y para cada $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$ $\mathbf{G}_l(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n) = \mathbf{G}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ y $\mathbf{R}_l\bar{X}_1 \ldots \bar{X}_n \leftrightarrow \mathbf{R}\bar{X}_1 \ldots \bar{X}_n$. Se dice que una variable **x** es *absoluta* cuando el ámbito de variabilidad de $\mathbf{x}_l$ coincide con el de **x**.

Por el teorema 10.1 tenemos que:

10.11. Si **A** (o el functor **G**) es absoluta, entonces **A** es constructible (para cada $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$ $\mathbf{G}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ es constructible).

Respecto al significado y utilidad de las nociones metamatemáticas de relativización y absolutidad, véase la introducción en la página 216. La relativización de una fórmula φ o una sentencia ψ se denota mediante φ_l y ψ_l, respectivamente, y se obtiene reemplazando cualquier concepto y variable que en ella aparezca por su correspondiente relativización (suponiendo que

exista). En especial también la relativización de un teorema se denota colocando un subíndice l a su número.

10.12. «$\in$» es absoluto.

Es cierto por definición de $\in_l$.

10.13. «$\subseteq$» es absoluto.

Prueba: $\bar{X} \subseteq_l \bar{Y} \leftrightarrow \forall \bar{u}(\bar{u} \in_l \bar{X} \rightarrow \bar{u} \in_l \bar{Y}) \leftrightarrow \forall \bar{u}(\bar{u} \in \bar{X} \rightarrow \bar{u} \in \bar{Y})$. Además, $\bar{X} \subseteq \bar{Y} \leftrightarrow \forall u(u \in \bar{X} \rightarrow u \in \bar{Y})$. Si $\forall u(u \in \bar{X} \rightarrow u \in \bar{Y})$, entonces, en especial, $\forall \bar{u}(\bar{u} \in X \rightarrow \bar{u} \in \bar{Y})$. Por otro lado, también es válida la implicación en el otro sentido, pues si u no pertenece a L, será falso que $u \in \bar{X}$, y por ello verdadero el condicional. Entonces $\bar{X} \subseteq_l \bar{Y} \leftrightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}$.

10.131. $\bar{X} \subseteq_l \bar{Y} \wedge \bar{Y} \subseteq_l \bar{X} \rightarrow \bar{X} = \bar{Y}$, es decir, el axioma de extensionalidad relativizado es válido.

Se prueba por 10.13 y el axioma de extensionalidad.

10.14. «$\subset$» es absoluto.

Prueba: $X \subset_l Y \leftrightarrow X \subset_l Y \wedge X \neq Y \leftrightarrow X \subset Y$ por 10.13.

Similarmente:

10.15. «**Dis**» es absoluto, es decir, $\mathbf{Dis}_l\ XY \leftrightarrow \mathbf{Dis}\ XY$

10.16. «**Vac**» es absoluto, es decir, $\mathbf{Vac}_l\ \bar{X} \leftrightarrow \mathbf{Vac}\ \bar{X}$

10.17. El functor «$\{X, Y\}$» es absoluto.

Prueba: Por 3.1 $\{\bar{X}, \bar{Y}\}_l$ es la clase constructible $\bar{Z}$ tal que $\forall \bar{u}(\bar{u} \in \bar{Z} \leftrightarrow \bar{u} = \bar{X} \vee \bar{u} = \bar{Y})$. $\{\bar{X}, \bar{Y}\}$ satisface esta condición de $\bar{Z}$, incluso con cuantificación sobre u, en vez de sobre $\bar{u}$. Además, por 9.92, $\{\bar{X}, \bar{Y}\}$ es constructible. Entonces, por 10.131, $\{\bar{X}, \bar{Y}\}$ es la única clase constructible que satisface esta condición. Por tanto existe la relativización del functor «$\{X, Y\}$» y $\{\bar{X}, \bar{Y}\}_l = \{X, Y\}$ para cada X e Y, es decir, «$\{X, Y\}$» es absoluto.

10.18. Si se define **G** de modo que $\mathbf{G}(X) = \mathbf{H}(\mathbf{F}(\mathbf{X}))$ y **H** y **F** son absolutos, entonces **G** es absoluto.

Prueba: $\mathbf{H}(\mathbf{F}(\bar{X})) = \mathbf{H}(\mathbf{F}_l(\bar{X}))$, y como, por 10.1, $\mathbf{F}_l(\bar{X})$ es constructible, tenemos que $\mathbf{H}(\mathbf{F}_l(\bar{X})) = \mathbf{H}_l(\mathbf{F}_l(\bar{X})) = \mathbf{G}_l(\bar{X})$.

Este principio también es válido para functores de más de un argumento.

10.19. El functor «$<X, Y>$» es absoluto.

Es una consecuencia inmediata de 10.17 y 10.18.
Similarmente:

10.20. El functor «$<X, Y, Z>$» es absoluto.

10.21. «**Un**» es absoluto.

Prueba: $\mathbf{Un}_l\ \bar{X} \leftrightarrow \forall \bar{u}\bar{v}\bar{w}(<\bar{v}, \bar{u}>_l \in_l \bar{X} \wedge <\bar{w}, \bar{u}>_l \in_l \bar{X} \rightarrow \bar{v}=\bar{w})$. Por 10.12 y 10.19 pueden omitirse los subíndices l de la derecha del bicondicional. Entonces (usando 9.62) la condición es equivalente a la obtenida al reemplazar respectivamente $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ por u, v, w, como en la prueba de 10.13.

10.22. «$\mathscr{C}$» es absoluto y «**Pr**» es absoluto.

Prueba: Por definición del modelo Δ en la página 254, tenemos que $\mathscr{C}_l\bar{X} \leftrightarrow \bar{X} \in L$, de modo que, por 9.64 y el axioma A2, $\mathscr{C}_l\ \bar{X} \leftrightarrow\ \mathscr{C}\bar{X}$. También: $\neg\mathscr{C}_l\bar{X} \leftrightarrow \neg\mathscr{C}\bar{X}$.
No es posible probar que todos los conceptos son absolutos; por ejemplo, no es posible hacerlo para «$\mathscr{P}$» y «V».

10.23. $V_l = L$

Prueba: V_l se define mediante el postulado $\forall \bar{x}(\bar{x} \in V_l)$. Puesto que L satisface esta condición, de $\mathscr{L}L$, el axioma de extensionalidad relativizado y 9.81 se sigue que $L = V_l$.

10.24. «0» es absoluto.

Prueba: $\forall \bar{x}(\neg\, \bar{x} \in 0)$ *y* 0 es la única clase constructible que satisface el postulado.

6. Prueba de los grupos de axiomas A-D para el modelo Δ

Ya ha sido probado que todos los relatores y functores que aparecen en los *axiomas* son absolutos. Esto facilita la prueba de los axiomas relativizados, pues al formar la relativización de una sentencia pueden dejarse todos los relatores y functores absolu-

tos tal y como están, puesto que, por 10.1, sólo pueden tener clases constructibles como argumentos, con lo cual los axiomas relativizados pueden formarse reemplazando simplemente X por $\bar{X}$ y x por $\bar{x}$. Por comodidad escribimos los axiomas en su forma relativizada:

$A1_l$	$\mathscr{L}\bar{x}$
$A2_l$	$\bar{X}\in\bar{Y}\to\mathscr{C}\bar{X}$
$A3_l$	$\forall\bar{u}(\bar{u}\in\bar{X}\leftrightarrow\bar{u}\in\bar{Y})\to\bar{X}=\bar{Y}$
$A4_l$	$\forall\bar{x}\bar{y}\exists\bar{z}\forall\bar{u}(\bar{u}\in\bar{z}\leftrightarrow\bar{u}=\bar{x}\vee\bar{u}=\bar{y})$
$B1_l$	$\exists\bar{A}\forall\bar{x}\bar{y}(<\bar{x},\bar{y}>\in\bar{A}\leftrightarrow\bar{x}\in\bar{y})$
$B2_l$	$\forall AB\exists\bar{C}\forall\bar{x}(\bar{x}\in C\leftrightarrow\bar{x}\in\bar{A}\wedge\bar{x}\in B)$
$B3_l$	$\forall\bar{A}\exists\bar{B}\forall\bar{x}(\bar{x}\in\bar{B}\leftrightarrow\neg\bar{x}\in\bar{A})$
$B4_l$	$\forall\bar{A}\exists B\forall\bar{x}(\bar{x}\in\bar{B}\leftrightarrow\exists\bar{y}(<\bar{y},\ \bar{x}>\in\bar{A}))$
$B5_l$	$\forall\bar{A}\exists\bar{B}\forall\bar{x}\bar{y}(<\bar{y},\ \bar{x}>\in\bar{B}\leftrightarrow\bar{x}\in\bar{A})$
$B6_l$	$\forall\bar{A}\exists\bar{B}\forall\bar{x}\bar{y}(<\bar{x},\ \bar{y}>\in\bar{B}\leftrightarrow<\bar{y},\ \bar{x}>\in\bar{A})$
$B7_l$	$\forall\bar{A}\exists\bar{B}\forall\bar{x}\bar{y}\bar{z}(<\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}>\in\bar{B}\leftrightarrow<\bar{y},\ \bar{z},\ \bar{x}>\in\bar{A})$
$B8_l$	$\forall\bar{A}\exists\bar{B}\forall\bar{x}\bar{y}\bar{z}(<\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}>\in\bar{B}\leftrightarrow<\bar{x},\ \bar{z},\ \bar{y}>\in\bar{A})$
$C1_l$	$\exists\bar{a}(\neg\,\mathbf{Vac}\ \bar{a}\wedge\forall\bar{x}(\bar{x}\in\bar{a}\to\exists\bar{y}(\bar{y}\in\bar{a}\wedge\bar{x}\subset\bar{y})))$
$C2_l$	$\forall\bar{x}\exists\bar{y}\forall\bar{u}\bar{v}(\bar{u}\in\bar{v}\wedge\bar{v}\in\bar{x}\to\bar{u}\in\bar{y})$
$C3_l$	$\forall\bar{x}\exists\bar{y}\forall\bar{u}(\bar{u}\subseteq\bar{x}\to\bar{u}\in\bar{y})$
$C4_l$	$\forall\bar{x}\bar{A}(\mathbf{Un}\bar{A}\to\exists\bar{y}\forall\bar{u}(\bar{u}\in\bar{y}\leftrightarrow\exists\bar{v}(\bar{v}\in\bar{x}\wedge<\bar{u},\ \bar{v}>\in\bar{A})))$
D_l	$\neg\,\mathbf{Vac}\,\bar{A}\to\exists\bar{x}(\bar{x}\in\bar{A}\wedge\mathbf{Dis}\ \bar{x}\bar{A})$

Al_l es el teorema 9.65; $A2_l$ es inmediato a partir de A2; por 10.131, es válido $A3_l$; $A4_l$ es satisfecho por $\bar{z}=\{\bar{x},\ \bar{y}\}$ que, por 9.6, es constructible. Probaremos $Bl\text{-}8_l$ mostrando en cada caso una clase constructible que satisfaga la condición:

Bl_l. Sea $\bar{A}=E\cap L$. Por 9.82 la clase $E\cap L$ es constructible, y satisface $<\bar{x},\ \bar{y}>\in E\cap L\leftrightarrow\bar{x}\in\bar{y}$, puesto que $<\bar{x},\ \bar{y}>\in E\leftrightarrow\bar{x}\in\bar{y}$ y además $<\bar{x},\ \bar{y}>\in L$.

2_l. Sea $C=\bar{A}\cap\bar{B}$. Por 9.84 esta clase es constructible, y satisface B2.

3_l. Sea $\bar{B}=L-A$. Por 9.83 y 9.81 es una clase constructible, y satisface $B3_l$.

4_l. Sea $\bar{B}=\mathscr{D}(\bar{A})$. Por 9.871 $\mathscr{D}(\bar{A})$ es constructible. Además $x\in\bar{B} \leftrightarrow \exists y(<y, x>\in\bar{A})$. Entonces, en especial, $\bar{x}\in\bar{B} \leftrightarrow \exists y(<y, \bar{x}>\in\bar{A}) \leftrightarrow \exists\bar{y}(<\bar{y}, \bar{x}>\in\bar{A})$. La justificación de la última equivalencia reside en que si hay un tal y debe ser, por 9.62, constructible.

5_l. Sea $\bar{B}=L\cap(V\times\bar{A})$. $\bar{B}$ es, por 9.873, constructible. Además, como $<x, y>\in B \leftrightarrow <x, y>\in L\wedge y\in A$, entonces $<\bar{x}, \bar{y}>\in B \leftrightarrow <\bar{x}, \bar{y}>\in L\wedge\bar{y}\in A$, y puesto que, por 9.62, $<\bar{x}, \bar{y}>\in L$, tenemos que $<\bar{x}, \bar{y}>\in\bar{B} \leftrightarrow \bar{y}\in\bar{A}$.

6_l. Sea $\bar{B}=\mathbf{Inv}(\bar{A})$. Por 9.872 $\bar{B}$ es constructible. Y como $<x, y>\in\mathbf{Inv}(\bar{A}) \leftrightarrow <y, x>\in\bar{A}$, entonces, en especial $<\bar{x}, \bar{y}>\in\mathbf{Inv}(\bar{A}) \leftrightarrow <\bar{y}, \bar{x}>\in A$.

Los axiomas B7-8_l se prueban del mismo modo. Consideremos ahora los axiomas Cl-4_l:

1_l. $\bar{a}=F(\omega)$ satisface a $\mathrm{C}1_l$.

Prueba: Por 9.27 $\omega\in\mathscr{R}(J_0)$, así que $F(\omega)=F[\omega]$. Si $\bar{x}\in\bar{a}$ (es decir, si $\bar{x}=F(\alpha)$ con $\alpha<\omega$) hay un número natural β tal que $\beta\in\mathscr{R}(J_0)$ y $\beta>\alpha$ (por ejemplo, gracias a 9.25 y 9.26, $\beta=J_0(<0, \alpha+1>)$). Si $\bar{y}=F(\beta)$, entonces $\bar{y}\in\bar{a}$, y puesto que $F(\alpha)\subseteq F[\beta]$ y $F(\beta)=F[\beta]$, se sigue que $\bar{x}\subseteq\bar{y}$. Además $F(\alpha)\in F[\beta]$, pero no $F(\alpha)\in F(\alpha)$, de modo que $F(\alpha)\subset F(\beta)$.

2_l. Considérese $\bigcup\bar{x}$; por 5.122 y 9.61 se trata de un conjunto de conjuntos constructibles. En consecuencia, por 9.63, hay un $\bar{y}$ tal que $\bigcup\bar{x}\subseteq\bar{y}$. Entonces $\forall uy(u\in v\wedge v\in\bar{x} \rightarrow u\in\bar{y})$, con lo cual $\forall\bar{u}\bar{v}(\bar{u}\in\bar{v}\wedge\bar{v}\in\bar{x} \rightarrow \bar{u}\in\bar{y})$, es decir, $\bar{y}$ satisface la condición de $\mathrm{C}2_l$.

3_l. Considérese $L\cap\mathscr{P}(\bar{x})$ (que, por 5.121, es un conjunto). Por 9.63 hay un $\bar{y}$ tal que $L\cap\mathscr{P}(\bar{x})\subseteq\bar{y}$. Por tanto, $u\in L\cap\mathscr{P}(\bar{x})\rightarrow u\in\bar{y}$. Entonces $\bar{u}\in L\cap\mathscr{P}(\bar{x})\rightarrow\bar{u}\in\bar{y}$, y con ello, $\bar{u}\in\mathscr{P}(\bar{x})\rightarrow\bar{u}\in\bar{y}$, esto es, $\bar{u}\subseteq\bar{x}\rightarrow\bar{u}\in\bar{y}$.

4_l. Sea $\bar{y}=\bar{A}[\bar{x}]$. Por 9.91 $\bar{y}$ es constructible. Como $u\in\bar{y}\leftrightarrow \exists v(v\in\bar{x}\wedge <u, v>\in\bar{A})$, entonces, en especial, $\bar{u}\in\bar{y}\leftrightarrow\exists v\ (v\in\bar{x}\wedge <\bar{u}, v>\in\bar{A})$. Ahora bien, si un tal v es constructible, seguirá satisfaciendo la condición, y si existe un v que satisfaga la condición será constructible, puesto que $v\in\bar{x}$. En conclusión, $\bar{u}\in\bar{y} \leftrightarrow \exists\bar{v}\ (\bar{v}\in\bar{x}\wedge <\bar{u}, \bar{v}>\in\bar{A})$.

Consideremos finalmente el axioma $\mathbf{D}_l$. Por el axioma D: $\exists x(x \in \bar{A} \wedge \mathbf{Dis}\ x\bar{A})$. Como $x \in \bar{A}$, x es constructible. Luego hay un $\bar{x}$ que satisface la condición.

Como todos los axiomas de Σ son válidos en Δ, se sigue que todos los teoremas probados hasta el momento, excepto quizá los basados en el axioma de elección, son también válidos en Δ. Consiguientemente, también los teoremas de existencia y unicidad necesarios para definir las constantes y functores introducidos hasta aquí serán válidos en Δ, de modo que existe la relativización de todos los conceptos introducidos (con excepción de los conceptos cuya definición depende del axioma de elección, los cuales han sido marcados con *). En especial existirán $\mathscr{L}_l$ y L_l.

7. Prueba de que $V = L$ es válido en el modelo Δ

En vistas a probar que el axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo son válidos en el modelo Δ, mostraremos que 1) ambos se siguen de los axiomas de Σ junto con el axioma adicional $V = L$ (que dice que todo conjunto es constructible), y 2) $V = L$ es válido en el modelo Δ, es decir, $V_l = L_l$. Comenzamos con el punto 2). Puesto que, por 10.23, $V_l = L$, es suficiente probar que $L_l = L$, es decir, que *la clase de los conjuntos constructibles es absoluta.* Con este fin se probará que todos los functores, etc., usados en la construcción de L son absolutos.

Será útil un comentario general sobre las pruebas de absolutilidad. Para que el functor $\mathbf{G}(X_1, \dots, X_n)$ sea absoluto es suficiente mostrar que:

1) $\mathbf{G}$ proporciona clases constructibles cuando se aplica a clases constructibles.

2) $\mathbf{G}$ satisface el postulado definicional relativizado, es decir, si $\mathbf{G}$ ha sido definido mediante $\varphi(\mathbf{G}(X_1, \dots, X_n), X_1, \dots, X_n)$, entonces cumple $\varphi_l(\mathbf{G}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n), \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$.

Es fácil probar que 1) y 2) son condiciones suficientes, a saber: $\mathbf{G}_l$ existe, puesto que el modelo satisface los axiomas de Σ. Entonces φ_l tiene la propiedad de que para cada $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ hay a

lo máximo un Y tal que $\varphi_l(Y, \bar{X}_1, ..., \bar{X}_n)$. Pero como, por definición de $\mathbf{G}_l$, φ_l $(\mathbf{G}_l(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_n), \bar{X}_1, ..., \bar{X}_n)$, y por el supuesto 2), $\varphi_l(\mathbf{G}(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_n), \bar{X}_1, ..., \bar{X}_n)$, tenemos que $\mathbf{G}_l(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_n) = \mathbf{G}(\bar{X}_1, ..., \bar{X}_n)$. Similarmente, para que una constante **A** sea absoluta es suficiente mostrar que es constructible y que satisface el postulado relativizado. Recuérdese también que, por 10.18, los functores definidos sustituyendo functores absolutos dentro de functores absolutos son absolutos.

11.1. «×» es absoluto.

Prueba: Por 9.88 $\bar{A} \times \bar{B}$ es constructible. Por la definición 4.1 tenemos $u \in \bar{A} \times \bar{B} \leftrightarrow \exists vw(v \in \bar{A} \wedge w \in \bar{B} \wedge u = <v, w>)$. Entonces $\bar{u} \in \bar{A} \times \bar{B} \leftrightarrow \exists vw(v \in \bar{A} \wedge w \in \bar{B} \wedge \bar{u} = <v, w>)$. Ahora bien, como ya es usual, el lado derecho del bicondicional es equivalente al enunciado obtenido reemplazando v, w respectivamente por $\bar{v}$, $\bar{w}$. Por tanto, $\bar{A} \times \bar{B}$ satisface el postulado relativizado y de aquí, por el anterior comentario, que «×» sea absoluto.

11.11. Los functores «A^2», «A^3», ..., son absolutos.

Se sigue de 10.8 y 11.1.

11.12. «**Rel**» y «$\mathbf{Rel}_3$» son absolutos.

Prueba: **Rel** $\bar{X} \leftrightarrow \bar{X} \subseteq V^2$ y $\mathbf{Rel}_l$ $\bar{X} \leftrightarrow \bar{X} \subseteq L^2$, por 10.23. Pero, por 9.62, $\bar{X} \subseteq L^2 \leftrightarrow \bar{X} \subseteq V^2$, de modo que $\mathbf{Rel}_l$ $\bar{X} \leftrightarrow$ **Rel** $\bar{X}$. Similarmente para $\mathbf{Rel}_3$.

11.13. «$\mathscr{D}$» es absoluto.

Prueba: Por 9.871 $\mathscr{D}(\bar{A})$ es constructible. $x \in \mathscr{D}(\bar{A}) \leftrightarrow \exists y$ $(<y, x> \in \bar{A})$, con lo cual $\bar{x} \in \mathscr{D}(\bar{A}) \leftrightarrow \exists y(<y, \bar{x}> \in \bar{A})$. Al modo usual, el lado derecho del bicondicional es equivalente a la sustitución de y por $\bar{y}$, de modo que $\mathscr{D}$ $(\bar{A})$ satisface el postulado relativizado.

11.14. «∩» es absoluto.

Prueba: Por 9.84 $\bar{A} \cap \bar{B}$ es constructible. Como $x \in \bar{A} \cap \bar{B} \leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}$, tenemos que $\bar{x} \in \bar{A} \cap \bar{B} \leftrightarrow \bar{x} \in \bar{A} \wedge \bar{x} \in \bar{B}$, esto es, $\bar{A} \cap \bar{B}$ satisface el postulado relativizado.

11.15. «$\mathbf{Inv}_n$» es absoluto ($n = 1, 2, 3$).

Prueba: Por 9.872 $\mathbf{Inv}_n(\bar{A})$ es constructible. Consideremos, por ejemplo, $\mathbf{Inv}_1(\bar{A})$. Por definición satisface la condición:

$$\mathbf{Rel}\ \mathbf{Inv}_1(\bar{A}) \wedge \forall xy(<x, y> \in \mathbf{Inv}_1(\bar{A}) \leftrightarrow <y, x> \in \bar{A})$$

Esta condición implica, por 11.12, el enunciado relativizado. De modo similar ocurre con $\mathbf{Inv}_n(\bar{A})$.

11.16. «$\restriction$» es absoluto.

Prueba: $\bar{A}\restriction\bar{B}=\bar{A}\cap(V\times\bar{B})$ y $\bar{A}\restriction_l\bar{B}=\bar{A}\cap(L\times\bar{B})$. Como $\bar{A}\cap(V\times\bar{B})\subseteq L\times L$, por 9.62, resulta, por 4,87, que $\bar{A}\restriction\bar{B}=\bar{A}\cap(V\times\bar{B})\cap(L\times L)=\bar{A}\cap(L\times\bar{B})$. Por tanto, $\bar{A}\restriction\bar{B}=\bar{A}\restriction_l\bar{B}$.

11.17. «$\mathscr{R}$» es absoluto.

Prueba: Por definición $\mathscr{D}(\mathbf{Inv}(\bar{A}))=\mathscr{R}(\bar{A})$. Entonces, por 10.18, 11.13 y 11.15, tenemos el teorema.

11.18. El functor «$A[B]$» es absoluto.

Prueba: Por definición $A[B]=\mathscr{R}(A\restriction B)$. Entonces, de 10.18 se sigue el teorema.

11.181. El functor relativizado del complemento es «$L-\bar{X}$».

Prueba: $L-\bar{X}$ es, por 9.81 y 9.83, constructible, y $\bar{y}\in L-\bar{X}\leftrightarrow \neg\,\bar{y}\in\bar{X}$.

11.19. El functor «$A-B$» es absoluto.

Prueba: $\bar{A}-_l\bar{B}=\bar{A}\cap(L-\bar{B})=\bar{A}\cap L\cap(-\bar{B})=\bar{A}\cap(-\bar{B})=\bar{A}-\bar{B}$.

11.20. «$\cup$» es absoluto.

Prueba: $\bar{A}\cup_l\bar{B}=L-((L-\bar{A})\cap(L-\bar{B}))=L-(L-(\bar{A}\cup\bar{B}))=\bar{A}\cup\bar{B}$ (puesto que $\bar{A}\cup\bar{B}\subseteq L$).

11.21. $E_l=E\cap L$

Prueba: Por 9.82 $E\cap L$ es constructible. Además, puesto que $\mathbf{Rel}\ E\cap L$, $<\bar{x}, \bar{y}>\in L$ y $<\bar{x}, \bar{y}>\in E\leftrightarrow\bar{x}\in\bar{y}$, tenemos $\mathbf{Rel}_l\ E\cap L\wedge\forall\bar{x}\bar{y}(<\bar{x}, \bar{y}>\in E\cap L\leftrightarrow\bar{x}\in\bar{y})$. Por tanto, $E\cap L$ satisface el postulado relativizado.

11.22. «$\mathscr{F}_2$» es absoluto.

Prueba: $\mathscr{F}_{2_l}(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{X} \cap_l E_l = \bar{X} \cap L \cap E = \bar{X} \cap E = \mathscr{F}_2(X, Y)$, por 11.14 y 11.21.

11.221. Los functores correspondientes a las operaciones fundamentales «$\mathscr{F}_n$» ($n = 1, 2, ..., 8$) son absolutos. La prueba se sigue, utilizando 10.18 y 11.14, de 10.17, 11.22, 11.19, 11.16, 11.13, y 11.15, respectivamente.

11.23. El functor diádico «$A(X)$» es absoluto.

Prueba: Como cualquier y que satisfaga $< y, \bar{X} > \in \bar{A}$ es, por 9.51, constructible, tenemos que: si hay un único conjunto *constructible* y tal que $< y, \bar{X} > \in \bar{A}$, habrá un único conjunto que satisfaga esa condición, y viceversa. Por tanto, $\bar{A}(\bar{X})_l = \bar{A}(\bar{X})$ en este caso. En caso contrario ambos son 0.

11.3. «**Incl**» es absoluto.

Prueba: **Incl** $\bar{X} \leftrightarrow \forall u(u \in \bar{X} \rightarrow u \subseteq \bar{X}) \leftrightarrow \forall \bar{u}(\bar{u} \in \bar{X} \rightarrow \bar{u} \subseteq \bar{X}) \leftrightarrow$ **Incl**$_l$ $\bar{X}$.

11.31. «**Ord**» es absoluto.

Prueba: **Ord** $\bar{X} \leftrightarrow$ **Incl** $\bar{X} \wedge \forall uv(u, v \in \bar{X} \rightarrow u = v \vee u \in v \vee v \in u)$
$\leftrightarrow$ **Incl**$_l$ $\bar{X} \wedge \forall \bar{u}\bar{v}(\bar{u}, \bar{v} \in \bar{X} \rightarrow \bar{u} = \bar{v} \vee \bar{u} \in \bar{v} \vee \bar{v} \in \bar{u})$
$\leftrightarrow$ **Ord**$_l$ $\bar{X}$.

La primera y última equivalencia se siguen inmediatamente de las definiciones de **Ord** y **Ord**$_l$.

11.32. «**Número-ordinal**» es absoluto.

Prueba: **Número-ordinal** $\bar{X} \leftrightarrow$ **Ord** $\bar{X} \wedge \mathscr{C} \bar{X} \leftrightarrow$ **Ord**$_l$ $X \wedge \mathscr{C}_l \bar{X} \leftrightarrow$ **Número-ordinal**$_l$ $\bar{X}$, por 11.31 y 10.22.

11.31 dice que los ordinales, en el sentido de Δ, son los mismos que los ordinales, en el sentido original, que pertenecen al universo del modelo Δ. Esto no significa que los ordinales del modelo Δ sean los ordinales del sistema original, pues no se dice nada acerca de los ordinales que puedan no pertenecer al universo del modelo (es decir, que puedan no ser constructibles). Véase, sin embargo, 11.42.

11.4. «**Fnc**» es absoluto.

Prueba: $\mathbf{Fnc}_l\ \bar{Y} \leftrightarrow \mathbf{Rel}_l\ \bar{Y} \wedge \mathbf{Un}_l\ \bar{Y} \leftrightarrow \mathbf{Rel}\ \bar{Y} \wedge \mathbf{Un}\ \bar{Y} \leftrightarrow \mathbf{Fnc}\ \bar{Y}$, por 11.12, 10.21 y 4.61.

11.41. «**Fn**» es absoluto.

Prueba: $\bar{Y}\ \mathbf{Fn}_l\ \bar{X} \leftrightarrow \mathbf{Fnc}_l\ \bar{Y} \wedge \mathscr{D}_l(\bar{Y}) = \bar{X} \leftrightarrow \mathbf{Fnc}\ \bar{Y} \wedge \mathscr{D}(Y) = X$, por 11.4, 11.13 y 4.63.

11.42. «Ω» es absoluta.

Prueba: Por 7.16_l $\mathbf{Ord}_l\ \Omega_l$, y por 7.17_l $\mathbf{Pr}_l\ \Omega_l$. Pero, por 10.1, Ω_l es constructible, y puesto que, por 11.31 y 10.22, **Ord** y **Pr** son absolutos, tenemos que $\mathbf{Ord}\ \Omega_l$ y $\mathbf{Pr}\ \Omega_l$. Entonces, por 7.2, $\Omega_l = \Omega$.

De 10.11 se sigue que $\Omega \subseteq L$, usando 11.42; en otras palabras, todo número ordinal es constructible. Además, 11.42 implica que:

11.421. Las variables α, β, ..., son absolutas.

11.43. «$<$» es absoluto.

Prueba: «$<$» es por definición lo mismo que «$\in$».

11.44. «$\leqslant$» es absoluto.

Prueba: $X \leqslant Y$ es por definición $X \in Y \vee X = Y$.

11.45. «$+1$» es absoluto.

Prueba: 7.4, 10.7, 11.20 y 10.18.

11.451. Cada una de las constantes «0», «1», «2», «3», ..., etc., es absoluta. Se prueba por 10.24 y 11.45.

11.46. «$\bigcup$»(y, por tanto, «**Max**» y «**Lim**») es absoluto.

Prueba: $z \in \bigcup \bar{X} \leftrightarrow \exists v(z \in v \wedge v \in \bar{X}) \leftrightarrow \exists \bar{v}(z \in \bar{v} \wedge \bar{v} \in \bar{X}) \leftrightarrow z \in \bigcup_l \bar{X}$. Por tanto, $\bigcup \bar{X} = \bigcup_l \bar{X}$, por el axioma de extensionalidad.

Ahora resta probar que las constantes «R», «S», «J», «H_1», «H_2», «F» y, finalmente, «L» son absolutas, recordando que R es un orden de pares definido en 7.81, S es un orden de tríadas $<n, \alpha, \beta>$ definido en 9.2, y F la función, introducida en 9.3, que define L. La prueba de absolutidad de cada una de estas constantes se fundará en el siguiente lema:

Si la constante **A** se define por medio del postulado $\varphi(\mathbf{A})$ y todas las constantes, los functores, los relatores y las variables que aparecen en φ son absolutos, entonces **A** es absoluta.

Prueba: Si φ satisface la condición especificada, entonces $\varphi_l(\bar{X}) \leftrightarrow \varphi(\bar{X})$. Por definición de **A** y de $\mathbf{A}_l$ tenemos también que $\varphi_l(\mathbf{A}_l)$ y $\varphi(\mathbf{A})$. Como, por 10.1, $\mathbf{A}_l$ es constructible, $\varphi_l\,(\mathbf{A}_l)$ implica $\varphi(\mathbf{A}_l)$ y entonces $\mathbf{A}_l = \mathbf{A}$, ya que $\varphi(\mathbf{A}_l)$ y $\varphi(\mathbf{A})$.

11.5. «*R*» es absoluto.

Prueba: Por la definición 7.81 tenemos que $R \subseteq (\Omega^2)^2 \wedge \forall\alpha\beta\gamma\delta(<<\alpha, \beta>, <\gamma, \delta>> \in R \leftrightarrow \mathbf{Max}\,\{\alpha, \beta\} < \mathbf{Max}\,\{\gamma, \delta\} \vee (\mathbf{Max}\,\{\alpha, \beta\} = \mathbf{Max}\,\{\gamma, \delta\} \wedge (\beta < \delta \vee (\beta = \delta \wedge \alpha < \gamma))))$. Los conceptos que aparecen en el postulado definicional son: $\subseteq$, Ω, ^{2}, $< >$, **Max**, $\{\}$, $<$, $\in$, y las variables α, β, ... Por 10.13, 11.42, 11.11, 10.19, 11.46, 10.17, 11.43, 10.12 y 11.421, respectivamente, se ha probado que todos ellos son absolutos.

11.51. «*S*» es absoluta.

Prueba: Por la definición 9.2 tenemos $S \subseteq (9 \times \Omega^2)^2 \wedge \forall\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu(\mu < 9 \wedge \nu < 9 \rightarrow (<<\mu, \alpha, \beta>, <\nu, \gamma, \delta>> \in S \leftrightarrow <<\alpha, \beta>, <\gamma, \delta>> \in R \vee (<\alpha, \beta> = <\gamma, \delta> \wedge \mu < \nu)))$. Los conceptos que aparecen en el postulado que define a *S* y que son diferentes de los que aparecían en el postulado de *R* son: $\times$, *R*, 9; y, por 11.1, 11.5 y 11.451, respectivamente, son absolutos.

11.52. «*J*» es absoluta.

Prueba: Tenemos, por la definición 9.21, que $J\ \mathbf{Fn}\ 9 \times \Omega^2 \wedge \mathscr{R}(J) = \Omega \wedge \forall\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu\ (\mu, \nu < 9 \rightarrow (<\mu, \alpha, \beta>\ S <\nu, \gamma, \delta> \rightarrow J(<\mu, \alpha, \beta>) < J(<\nu, \gamma, \delta>)))$. Los signos adicionales de este postulado son: **Fn**, *R* y (), y ya se ha probado que son absolutos respectivamente en 11.41, 11.17 y 11.23.

11.53. Cada una de las «J_n» es absoluta; $n = 0, 1, 2, ..., 8$.

Prueba: $J_0(<\alpha, \beta>) = J(<0, \alpha, \beta>) \wedge J_0\ Fn\ \Omega^2$. No hay aquí más signos que los ya mencionados antes. Similarmente en J_1, ..., J_8.

11.54. «H_1» y «H_2» son absolutas.

Prueba: En el postulado definicional 9.24 no hay más signos que los ya mencionados.

11.6. «F» es absoluta.

Prueba: Los únicos símbolos adicionales que aparecen en el postulado definicional 9.3 son $\upharpoonright$ y $\mathscr{F}_1, ..., \mathscr{F}_8$, que son absolutos, respectivamente por 11.16 y 11.221.

11.7. «L» es absoluta.

Prueba: $L = \mathscr{R}(F)$ y $\mathscr{R}$ y F son absolutos, por 11.6 y 11.17.

Ha sido probado a partir de los axiomas de Σ que $L_l = L$ y, por tanto, que $V_l = L_l$, es decir, que la proposición $V = L$ es válida en el modelo Δ. Esto prueba que si existe un modelo para los grupos de axiomas A, B, C y D, entonces también el conjunto de axiomas que consiste en añadir a los anteriores como nuevo axioma la proposición $V = L$ tiene un modelo, a saber, el modelo constituido por las clases y conjuntos «constructibles» del modelo dado para Σ. Entonces si el sistema A, B, C, D es consistente, también lo es el sistema aumentado. Otro modo de decir lo mismo es el siguiente: si se obtuviese una contradicción de $V = L$ y los axiomas de Σ (es decir, los axiomas de los grupos A, B, C y D), entonces la misma contradicción se podría derivar de $L_l = V_l$ y los axiomas relativizados A_l, B_l, C_l y D_l. Pero como $V_l = L_l$ y A_l, B_l, C_l y D_l pueden probarse en Σ, como ya se ha mostrado, entonces Σ sería contradictorio, de modo que podría construirse una contradicción en Σ si se derivase alguna contradicción de Σ y $V = L$.

8. Prueba de que $V = L$ implica el axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo

Ahora sólo queda probar que el axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo se siguen de $V = L$ y Σ.

Respecto al axioma de elección esto es inmediato, pues la relación As definida en 11.8, relación que elige el elemento de menor orden de cada conjunto constructible no vacío, satisface, evidentemente, el axioma E si $V = L$.

11.8. Df. $(<y, x> \in As \leftrightarrow y \in x \wedge \forall z(Od(z) < Od(y) \rightarrow \neg z \in x)) \wedge$ **Rel** As.

Llamaremos el elemento «elegido» de x al $As(x)$.

11.81. Df. $C(\alpha) = Od(As(F(\alpha))) \wedge C$ **Fn** Ω.

$C(\alpha)$ es el orden del elemento «elegido» de $F(\alpha)$. De aquí que, por 9.52, $C(\alpha) \leqslant \alpha$.

Las restantes páginas están dedicadas a derivar la hipótesis generalizada del continuo a partir de $V=L$ y los axiomas de Σ. Como ya hemos probado el axioma de elección a partir de estos supuestos, nos está permitido utilizar todos los teoremas y definiciones marcados con * en su derivación. Los siguientes teoremas serán consecuencias de Σ y $V=L$, pero, sin embargo, únicamente 12.2 depende realmente de $V=L$; en todos los otros no se usa $V=L$ e incluso se podría haber evitado el uso del axioma de elección en sus pruebas.

12.1. $|F[\omega_\alpha]| = \omega_\alpha$.

Prueba: Por 8.31 $|F[\omega_\alpha]| \leqslant |\omega_\alpha| = \omega_\alpha$. Por otro lado, hay un subconjunto de ω_α, a saber, $\omega_\alpha \cap \mathscr{R}(J_0)$, tal que los valores que toma F para argumentos diferentes de ese subconjunto son también diferentes, puesto que si $\gamma \neq \delta$ y γ, $\delta \in \omega_\alpha \cap \mathscr{R}(J_0)$ y suponemos que $\gamma \in \delta$, entonces tenemos, por 9.3, que $F(\gamma) \in F(\delta)$, de modo que $F(\gamma) \neq F(\delta)$. Pero como $J_0[\omega_\alpha^2] \subseteq \omega_\alpha \cap \mathscr{R}(J_0)$, por 9.26, y como J_0 es biunívoca, tenemos que $|\omega_\alpha \cap \mathscr{R}(J_0)| \geqslant \omega_\alpha$. De aquí se sigue que $|F[\omega_\alpha]| \geqslant \omega_\alpha$.

Gracias a 12.1, la hipótesis generalizada del continuo se sigue inmediatamente del siguiente teorema:

12.2. $\mathscr{P}(F[\omega_\alpha]) \subseteq F[\omega_{\alpha+1}]$

Este teorema se prueba por medio del siguiente lema:

12.3. Si $a \subseteq \Omega$, a está clausurada respecto a C, H_1 y H_2 y respecto a las relaciones triádicas $J_0, \ldots, J_8$, y si G es un isomorfismo de a en un ordinal ξ respecto a E, entonces G también es un isomorfismo respecto a $\{<\alpha, \beta> / F(\alpha) \in F(\beta)\}$, es decir,

$$\alpha, \beta \in a \rightarrow (F(\alpha) \in F(\beta) \leftrightarrow F(G(\alpha)) \in F(G(\beta))).$$

Probaremos en primer lugar que 12.3 implica 12.2.

Prueba: Considérese un $u \in \mathscr{P}(F[\omega_\alpha])$, es decir, $u \subseteq F[\omega_\alpha]$. Como $V = L$, hay un δ tal que $u = F(\delta)$; fórmese, de acuerdo con 8.73, la clausura del conjunto $\omega_\alpha \cup \{\delta\}$ respecto a C, H_1 y H_2 y respecto a las relaciones triádicas $J_0, \ldots, J_8$, clausura a la que nos referiremos mediante a. Tenemos por 8.73 que a es un conjunto y que $|a| = \omega_\alpha$. a es un conjunto de ordinales y entonces, utilizando 7.161, está bien ordenado por E, con lo cual, por 7.7, es isomorfo a un cierto número ordinal ξ. Sea G el isomorfismo, de modo que $G[a] = \xi$. Para abreviar llamaremos α^* al $G(\alpha)$. Por el lema 12.3 obtenemos:

$$\alpha, \beta \in a \rightarrow (F(\alpha) \in F(\beta) \leftrightarrow F(\alpha^*) \in F(\beta^*)).$$

Consideremos ahora δ^*, la imagen de δ en G. $\delta^* \in \xi$, es decir, $\delta^* < \xi$. Como G, al ser un isomorfismo, es biunívoca, $|\xi| = |a| = \omega_\alpha$, de donde se sigue que $\xi < \omega_{\alpha+1}$, y por tanto $\delta^* < \omega_{\alpha+1}$. Por definición $\omega_\alpha \subseteq a$, y para cada $\beta \in a$: $F(\beta) \in F(\delta) \leftrightarrow F(\beta^*) \in F(\delta^*)$, y ω_α es inclusivo (pues es un número ordinal). Entonces ω_α es una E-sección de a, por lo cual G establece una correspondencia biunívoca entre ω_α y una E-sección de ξ, es decir, por 7.21, un número ordinal. Pero, por 7.62, sólo puede tratarse de la función identidad de ω_α en él mismo. En consecuencia, si $\beta \in \omega_\alpha$, entonces $\beta = \beta^*$. De aquí se sigue que para todo $\beta \in \omega_\alpha$: $F(\beta) \in F(\delta) \leftrightarrow F(\beta) \in F(\delta^*)$, esto es, $F(\delta)$ y $F(\delta^*)$ tienen los mismos elementos en común con $F[\omega_\alpha]$, es decir, $F(\delta) \cap F[\omega_\alpha] = F(\delta^*) \cap F[\omega_\alpha]$, y como, por el supuesto, $F(\delta) \subseteq F[\omega_\alpha]$, concluimos que $F(\delta) = F(\delta^*) \cap F[\omega_\alpha]$. Pero como, por 9.27, $\omega_\alpha \in \mathscr{R}(J_0)$, se sigue de 9.35 que $F[\omega_\alpha] = F(\omega_\alpha)$, y, por tanto, $u = F(\delta) = F(\delta^*) \cap F(\omega_\alpha)$. En conclusión, por 9.611 $Od(u) < \omega_{\alpha+1}$ y, en otras palabras, $u \in F[\omega_{\alpha+1}]$, q.e.d.

En vistas a probar 12.3, probaremos primero el siguiente teorema auxiliar:

12.4. De la hipótesis de 12.3 (omitiendo la clausura respecto a C) se sigue que 1) G es un isomorfismo para las relaciones triádicas $J_n (n = 0, \ldots, 8)$, es decir (si abreviamos $G(\alpha)$ mediante α^*), para cada $\alpha, \beta \in a$, $n < 9$: $J_n(<\alpha^*, \beta^*>) = (J_n(<\alpha, \beta>))^*$, y 2) ξ está clausurado respecto a las relaciones triádicas J_n.

En líneas generales, la prueba sigue las siguientes pautas: por definición de J y por la propiedad de clausura de a, J establece un isomorfismo respecto a S y E entre la clase de las tríadas $<n, \alpha, \beta>$, $n<9$, $\alpha, \beta \in a$, y a. G convierte este isomorfismo en un isomorfismo entre el conjunto t de tríadas $<n, \alpha, \beta>$, $n<9$, $\alpha, \beta \in \xi$ y ξ. Pero como J define al mismo tiempo un isomorfismo entre t y un cierto ordinal γ, también con respecto a S y E, se sigue, por 7.62, que $\gamma = \xi$ y que J restringida a t coincide con la imagen en G de J restringida a $9 \times a^2$. Y esto es precisamente lo que el teorema dice. La prueba en detalle es como sigue:

Sea $j = J \upharpoonright (9 \times a^2)$. Entonces $\mathscr{D}(j) = 9 \times a^2$. Como a está clausurado respecto a todas las J_n, $\mathscr{R}(j) \subseteq a$. Pero también $a \subseteq \mathscr{R}(j)$, pues si suponemos que $\gamma \in a$, entonces, puesto que a está clausurado respecto a H_1 y H_2, hay n, α, β con $\alpha, \beta \in a$ tales que $\gamma = J(<n, \alpha, \beta>)$, y de aquí que $\gamma \in R(j)$. Por tanto, $\mathscr{R}(j) = a$. Además, para $n, m<9$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in a$:

$$<n, \alpha, \beta> \ S \ <m, \gamma, \delta> \rightarrow j(<n, \alpha, \beta>) < j(<m, \gamma, \delta>),$$

puesto que J tiene esta propiedad y en este dominio coincide con j. Concluimos entonces que $j\,\mathbf{Isom}_{SE}(9 \times a^2, a)$. Llamemos ahora $\bar{j}$ a la función que construye G trasladando a j, esto es, $\bar{j}$ se define del siguiente modo: $\bar{j}\,\mathbf{Fn}(9 \times \xi^2)$ y para $\alpha, \beta \in a$, $n<9$, $\bar{j}(<n, \alpha^*, \beta^*>) = (j(<n, \alpha, \beta>))^*$. Esto también puede escribirse: para $\alpha, \beta \in \xi$, $n<9$, $\bar{j}(<n, \alpha, \beta>) = (j(<n, \alpha_1, \beta_1>))^*$, donde $\alpha_1 = G^{-1}(\alpha)$. Queremos probar que $\bar{j}\ \mathbf{Isom}_{SE}(9 \times \xi^2, \xi)$. Tenemos que $\mathscr{D}(\bar{j}) = 9 \times \xi^2$ y $\mathscr{R}(\bar{j}) = \xi$, puesto que j tiene propiedades correspondientes. Como G es un isomorfismo respecto a E, se sigue de la definición 7.8 que para $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in a$: $<\alpha, \beta> \ Le <\gamma, \delta> \leftrightarrow <\alpha^*, \beta^*> \ Le <\gamma^*, \delta^*>$. Del mismo modo, por la definición 7.81, para $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in a$:

$$<\alpha, \beta> \ R \ <\gamma, \delta> \leftrightarrow <\alpha^*, \beta^*> \ R \ <\gamma^*, \delta^*> .$$

De la definición 9.2 se sigue que para $n, m<9$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \xi$: $<n, \alpha_1, \beta_1> \ S \ <m, \gamma_1, \delta_1> \leftrightarrow <n, \alpha, \beta> \ S \ <m, \gamma, \delta>$. Supongamos ahora que $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \xi$, que $n, m<9$ y que $<n, \alpha, \beta> \ S \ <m, \gamma, \delta>$. Tendremos entonces que $<n, \alpha_1, \beta_1> \ S \ <m, \gamma_1, \delta_1>$, lo que implica que $j(<n, \alpha_1, \beta_1) \ E \ j(<m, \gamma_1, \delta_1>)$, puesto que $j\ \mathbf{Isom}_{SE}(9 \times a^2, a)$. Entonces, como G es un isomorfismo respecto a E, conluimos que $(j(<n, \alpha_1, \beta_1>))^* \ E \ (j(<m, \gamma_1,$

$\delta_1>))^*$, esto es, $\bar{j}(<n, \alpha, \beta>)\ E\ \bar{j}(<m, \gamma, \delta>)$. En consecuencia, $\bar{j}$ **Isom**$_{SE}(9\times\xi^2, \xi)$.

Definimos ahora $j_\xi = J\restriction(9\times\xi^2)$. Entonces $\mathscr{D}(j_\xi)=9\times\xi^2$, y como $9\times\xi^2$ es una S-sección de $9\times\Omega^2$, $\mathscr{R}(j_\xi)$ es un cierto número ordinal γ, porque la imagen de $9\times\xi^2$ en J será una E-sección de Ω, y, por 7.21, será entonces un ordinal. De aquí que tanto j_ξ **Isom**$_{SE}(9\times\xi^2, \xi)$ como $\bar{j}$ **Isom**$_{SE}(9\times\xi^2, \xi)$, pero como, por 7.62, no puede haber más de un isomorfismo de este tipo de un conjunto en un número ordinal, se concluye que $\gamma=\xi$ y $j_\xi=\bar{j}$. Entonces para $\alpha, \beta\in a$, $n<9$, $j_\xi(<n, \alpha^*, \beta^*>)=\bar{j}(<n, \alpha^*, \beta^*>) =(j(<n, \alpha, \beta>))^*$, que es equivalente, por las construcciones de j_ξ y j al enunciado: para $\alpha, \beta\in a$, $n<9$, $J(<n, \alpha^*, \beta^*>)=(J(<n, \alpha, \beta>))^*$, que a su vez es equivalente a: para $n=0, \ldots, 8$, $\alpha, \beta\in a$, $J_n(<\alpha^*, \beta^*>)=(J_n(<\alpha, \beta>))^*$, que era lo que se quería probar. Se sigue inmediatamente de la última igualdad que ξ está clausurado respecto a las J_n.

12.4 puede enunciarse de un modo simétrico como sigue:

12.5. Si $a\subseteq\Omega$, $a^*\subseteq\Omega$, a y a^* están clausurados respecto a H_1, H_2 y respecto a las relaciones triádicas J_n y G **Isom**$_{EE}(a, a^*)$, entonces G es un isomorfismo para las relaciones triádicas J_n.

La prueba se efectúa haciendo que a y a^* se correspondan, gracias a 7.7, biunívocamente con un mismo ordinal ξ y aplicando después 12.4.

12.51. La hipótesis de 12.5 implica además que para todo $\alpha\in a$ y para $n=0, \ldots, 8$: $\alpha\in\mathscr{R}(J_n)\rightarrow G(\alpha)\in\mathscr{R}(J_n)$.

Prueba: Como a está clausurada respecto a H_1 y H_2, $\alpha\in\mathscr{R}(J_n)$ implica que hay $\beta, \gamma\in a$ tales que $\alpha=J_n(<\beta, \gamma>)$. Entonces, por 12.5, $\alpha^*=J_n(<\beta^*, \gamma^*>)$, con lo cual $\alpha^*\in\mathscr{R}(J_n)$.

A continuación probaremos que:

12.6. Si a, a^* y G satisfacen la hipótesis de 12.5 y además a y a^* están también clausuradas respecto a C, entonces G es un isomorfismo para las relaciones $\{<\alpha, \beta>\ /\ F(\alpha)\in F(\beta)\}$ y $\{<\alpha, \beta>\ /\ F(\alpha)=F(\beta)\}$. En otras palabras:

(e) $$\alpha, \beta\in a\rightarrow((F(\alpha)\in F(\beta)\leftrightarrow F(\alpha^*)\in F(\beta^*))\wedge(F(\alpha)=F(\beta)\leftrightarrow F(\alpha^*)=F(\beta^*))),$$

donde, de nuevo, α^* es una abreviatura de $G(\alpha)$.

El esquema de la prueba consistirá en llevar a cabo una inducción sobre $\eta = \mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\}$. Supondremos como hipótesis inductiva que (e) es verdadera para $\alpha, \beta \in a$ y $\alpha, \beta < \eta$, y la probaremos para $\alpha, \beta \in a$, $\mathbf{Max}\ \{\alpha, \beta\} = \eta$. (La propiedad que se va a probar por inducción que tienen todos los ordinales η se expresa mediante la siguiente fórmula: $\forall\alpha\beta(\alpha, \beta \in a \wedge \eta = \mathbf{Max}$ $\{\alpha, \beta\} \rightarrow ((F(\alpha) \in F(\beta) \leftrightarrow F(G(\alpha)) \in F(G(\beta))) \wedge (F(\alpha) = F(\beta) \leftrightarrow F(G(\alpha))$ $= F(G(\beta)))))$. Esta expresión es normal, y entonces, por 7.161, podemos efectuar la inducción.) Si $\mathbf{Max}\{\alpha, \beta\} = \eta$ tenemos tres casos posibles, el primero de los cuales es: $\alpha = \beta = \eta$. En este caso las equivalencias (e) son verdaderas, porque en la primera los dos miembros son falsos y en la segunda ambos son verdaderos. Los dos casos restantes son $\alpha = \eta$, $\beta < \eta$ y $\alpha < \eta$, $\beta = \eta$. Por ello, lo que hay que probar es:

$$\text{para } \alpha, \beta < \eta, \alpha, \beta \in a: \begin{cases} F(\alpha) \in F(\eta) \leftrightarrow F(\alpha^*) \in F(\eta^*) \\ F(\eta) \in F(\beta) \leftrightarrow F(\eta^*) \in F(\beta^*) \\ F(\eta) = F(\beta) \leftrightarrow F(\eta^*) = F(\beta^*) \end{cases}$$

bajo el supuesto de que $\eta \in a$ y

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & F(\alpha) \in F(\beta) \leftrightarrow F(\alpha^*) \in F(\beta^*) \\ \text{II.} & F(\alpha) = F(\beta) \leftrightarrow F(\alpha^*) = F(\beta^*) \end{array} \quad \text{para } \alpha, \beta \in a \cap \eta$$

Todo lo que siga desde ahora hasta el final de la prueba del teorema 12.6 (en particular los teoremas (1)-(9) de las págs. 281-284) depende de esta hipótesis inductiva y de la hipótesis del teorema 12.6.

Serán útiles las siguientes abreviaturas: $r = F[a]$, $r_\eta = F[a \cap \eta]$, $r^* = F[a^*]$ y $r^*_\eta = F[a^* \cap \eta^*]$. Por tanto, $r_\eta \subseteq r$ y $r^*_\eta \subseteq r^*$. Definimos ahora una función biunívoca H de r_η en r^*_η así: $H = F \circ G \circ F^{-1}$. A causa de la hipótesis inductiva II H es biunívoca, y si $x = F(\alpha)$ y $\alpha \in a \cap \eta$, entonces $H(x) = F(\alpha^*)$. Por la hipótesis inductiva I H es un isomorfismo respecto a E. Obsérvese que la hipótesis del teorema 12.6 y las hipótesis inductivas son totalmente simétricas en a, a^* y en η, η^*, de modo que lo que se prueba a partir de ellas será también válido si se intercambian respectivamente a, η, r, r_η, G y H con a^*, η^*, r^*, r^*_η, G^{-1} y H^{-1}.

El siguiente paso será probar que H es un isomorfismo para la relación triádica $\{<z, x, y> / z = <x, y>\}$, para la relación tetrádica $\{<z, u, v, w> / z = <u, v, w>\}$ y para las Q_n. Para justificar esto se precisan ciertos resultados preliminares.

(1) r está clausurada respecto a las operaciones fundamentales.

Prueba: Si $x, y \in r$, entonces hay $\alpha, \beta \in a$ tales que $x = F(\alpha)$, $y = F(\beta)$, y como a está clausurada respecto a las J_n, por 9.31-9.34 tenemos que $\mathscr{F}_n(x, y) \in r$. Por ello si $x, y, z \in r$, entonces $x - y$, $\{x, y\}$, $<x, y>$, $<x, y, z>$ y $x \cap Q_n[y]$ están en r. En particular, si $x, y \in r$, también $x \cap Q_n[\{y\}] \in r$.

(2) $x \in r \rightarrow Od(x) \in a$.

Prueba: Por (1) $\{x\} \in r$, es decir, hay un $\alpha \in a$ tal que $\{x\} = F(\alpha)$. Sea $\beta = C(\alpha)$. Como a está clausurada respecto a C, $\beta \in a$. Ahora bien, por definición de C (11.81) $\beta = Od(x)$.

(3) $x \in r \wedge x \neq 0 \rightarrow x \cap r \neq 0$

Prueba: Hay un $\alpha \in a$ tal que $x = F(\alpha)$. Por la definición 11.81 $F(C(\alpha)) \in x$, y como a está clausurada respecto a C tenemos $F(C(\alpha)) \in r$, de modo que $x \cap r \neq O$.

(3.1) $\{x, y\} \in r \rightarrow x, y \in r$; $<x, y> \in r \rightarrow x, y \in r$; $<x, y, z> \in r \rightarrow x, y, z \in r$.

Prueba: Se sigue de (3) que $\{x\} \in r \rightarrow x \in r$, porque x es el único elemento de $\{x\}$, y también que $\{x, y\} \in r \rightarrow x, y \in r$, porque, por (3), $x \in r$ o $y \in r$; si suponemos que $x \in r$, entonces, por (1) $\{x\} \in r$, y también por (1), $\{x, y\} - \{x\} \in r$, de modo que, en el caso de que $x \neq y$, $\{y\} \in r$, y de aquí que $y \in r$. Por iteración $<x, y> \in r \rightarrow x, y \in r$, y $<x, y, z> \in r \rightarrow x, y, z \in r$. Se sigue entonces que

(4) $y \in r \wedge <y, x> \in Q_n \rightarrow x \in r$, para $n \neq 5$.

Prueba: Consideremos Q_6, la permutación del par ordenado. Si $<y, x> \in Q_6$, entonces hay u, v tales que $x = <v, u>$ e $y = <u, v>$. Hemos supuesto que $<u, v> \in r$, así que, por (3.1), $u, v \in r$, con lo cual $<v, u> \in r$, por (1), es decir, $x \in r$. De un modo similar ocurre con las otras permutaciones, es decir, con Q_7 y Q_8.

Consideremos ahora $Q_4 = P_2^{-1}$; supongamos que $y \in r$ con $<y, x> \in P_2^{-1}$; tendremos que $<x, y> \in P_2$, es decir, que y es un par ordenado con x como segundo miembro, de donde, por (3.1), $x \in r$.

Hay un teorema de inclusividad débil para r_η:

(5) $x \in r_\eta \wedge y \in x \rightarrow (y \in r \rightarrow y \in r_\eta)$.

Prueba: Sea $\alpha = Od(y)$. Por (2) $\alpha \in a$, y por 9.52 $Od(y) < Od(x) < \eta$. Entonces $\alpha \in a \cap \eta$, es decir, $y \in r_\eta$.

(6) $y \in F(\eta) \wedge y \in r \rightarrow y \in r_\eta$.

Prueba: Por 9.52 $Od(y) < \eta$. Por (2) $Od(y) \in a$, de modo que $Od(y) \in a \cap \eta$, es decir, $y \in r_\eta$.

(7) $\{x, y\} \in r_\eta \rightarrow x, y \in r_\eta$; $<x, y> \in r_\eta \rightarrow x, y \in r_\eta$; $<x, y, z> \in r_\eta \rightarrow x, y, z \in r_\eta$.

Prueba: Si $\{x, y\} \in r$, entonces $x, y \in r$, por (3.1), y de aquí, gracias a (5), se sigue el resultado. Por iteración obtenemos que $<x, y> \in r_\eta \rightarrow x, y \in r_\eta$, y lo mismo para las tríadas.

(8) H es un isomorfismo respecto a $\{<z, x, y> / z = \{x, y\}\}$; $\{<z, x, y> / z = <x, y>\}$, $\{<z, x, y, u> / z = <x, y, u>\}$ y respecto a Q_n ($n = 4, 5, \dots, 8$).

(En adelante x^* abreviará a $H(x)$. De este modo el asterisco será una abreviatura de G o H según aparezca sobre una letra griega o latina).

Prueba: Considérese $\{x, y\}$. Queremos probar que

$$x, y, z \in r_\eta \rightarrow (z = \{x, y\} \leftrightarrow z^* = \{x^*, y^*\}).$$

Por la simetría de las hipótesis y puesto que $x, y, z \in r_\eta$ es equivalente a $x^*, y^*, z^* \in r_\eta^*$, es obvio que para establecer la equivalencia basta con probar el bicondicional en una dirección. Lo probaremos de derecha a izquierda; $z^* = \{x^*, y^*\}$ implica que $x^* \in z^*$ y que $y^* \in z^*$, y entonces, como H es un isomorfismo respecto a E, $x \in z$ e $y \in z$, es decir, $\{x, y\} \subseteq z$. De este modo únicamente tenemos que probar que $z - \{x, y\} \neq 0$. Como $x, y, z \in r$, tenemos, por (1), que $z - \{x, y\} \in r$, de donde, por (3), si $z - \{x, y\} \neq 0$, existe un $u \in r$ tal que $u \in z - \{x, y\} \wedge u \in z$, y como

$z \in r_\eta$, concluimos por (5) que $u \in r_\eta$. Entonces $u \in z$, $u \neq x$ y $u \neq y$, con lo cual $u^* \in z^*$, $u^* \neq x^*$ y $u^* \neq y^*$, porque H es biunívoca y es un isomorfismo respecto a E. Pero esto significa que $z^* \neq \{x^*, y^*\}$, lo que contradice al supuesto.

Para justificar que H es un isomorfismo para $z = <x, y>$ debe probarse que $x, y, z \in r_\eta \rightarrow (z = <x, y> \leftrightarrow z^* = <x^*, y^*>)$. De nuevo es suficiente con establecer la implicación en una dirección. Supongamos que $z = <x, y>$. Se sigue entonces que $z = \{u, v\}$, donde $u = \{x, x\}$ y $v = \{x, y\}$. Por (7) tenemos que $u, v \in r_\eta$, así que, construyendo z^*, u^*, v^*, x^*, y^*, se sigue que $v^* = \{x^*, y^*\}$, $u^* = \{x^*, x^*\}$ y $z^* = \{u^*, v^*\}$, esto es, $z^* = <x^*, y^*>$.

Respecto a las tríadas ordenadas, si suponemos que $z = <x, y, u>$, entonces $z = <x, v>$, donde $v = <y, u>$. Por (7) $u, v \in r_\eta$, y entonces $z^* = <x^*, v^*>$ y $v^* = <y^*, u^*>$, esto es, $z^* = <x^*, y^*, u^*>$.

Consideremos ahora $Q_5 = P_2$; tenemos que mostrar que

$$x, z \in r_\eta \rightarrow (<x, z> \in P_2 \leftrightarrow <x^*, z^*> \in P_2).$$

Como es usual, sólo se precisa la implicación en una dirección. Supongamos que $<x, z> \in P_2$. Debe haber, entonces, un y tal que $z = <y, x>$; por (7) $y \in r_\eta$, por lo cual, utilizando (8), $z^* = <y^*, x^*>$, esto es, $<x^*, z^*> \in P_2$. Por otro lado, como H es un isomorfismo respecto a P_2, también debe ser un isomorfismo respecto a $Q_4 = P_2^{-1}$.

Quedan únicamente las permutaciones Q_6, Q_7 y Q_8. Consideremos, por ejemplo, el caso de Q_6. Si suponemos que $<x, y> \in Q_6$, entonces existen u, v tales que $x = <u, v>$ e $y = <v, u>$. Como $x, y \in r_\eta$, se sigue de (7) que $u, v \in r_\eta$ y consiguientemente, por (8), que $x^* = <u^*, v^*>$ e $y^* = <v^*, u^*>$, es decir, $<x^*, y^*> \in Q_6$. Las pruebas para Q_7 y Q_8 son similares.

Volvamos ahora a los tres enunciados que deben ser probados para finalizar la inducción, a saber,

$$(9) \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in a \cap \eta \begin{cases} 1. & F(\alpha) \in F(\eta) \leftrightarrow F(\alpha^*) \in F(\eta^*) \\ 2. & F(\eta) \in F(\beta) \leftrightarrow F(\eta^*) \in F(\beta^*) \\ 3. & F(\eta) = F(\beta) \leftrightarrow F(\eta^*) = F(\beta^*). \end{cases}$$

Ahora mostraremos que basta con probar el primero de estos enunciados. Suponiendo que el primero es verdadero, vamos a probar el tercero. Si $F(\eta) \neq F(\beta)$, entonces $F(\eta) - F(\beta) \neq 0$, o bien

$F(\beta)-F(\eta)\neq 0$, y además, por (1), $F(\eta)-F(\beta)\in r$ y $F(\beta)-F(\eta)\in r$. De (1) y (3) se sigue que hay un $u\in r$ tal que o bien $u\in F(\beta)-F(\eta)$ o bien $u\in F(\eta)-F(\beta)$. Por ello $u\in F(\beta)$ o $u\in F(\eta)$ y, en ambos casos, $u\in r_\eta$, por (6), por (5) y porque $F(\beta)\in r_\eta$. Supongamos ahora que $u\in F(\eta)-F(\beta)$, es decir, $u\in F(\eta)$ y $\neg u\in F(\beta)$. Por la hipótesis inductiva I tenemos que $\neg u^*\in F(\beta^*)$, y puesto que hemos tomado como hipótesis (9) 1., tenemos también que $u^*\in F(\eta^*)$. Entonces $F(\eta^*)-F(\beta^*)\neq 0$. Supongamos en segundo lugar que $u\in F(\beta)-F(\eta)$, esto es, $u\in F(\beta)$ y $\neg u\in F(\eta)$. Del mismo modo que antes concluimos que $u^*\in F(\beta^*)$ y $\neg u^*\in F(\eta^*)$, es decir, $F(\eta^*)\neq F(\beta^*)$. De este modo hemos probado que $F(\eta)\neq F(\beta)\rightarrow F(\eta^*)\neq F(\beta^*)$, y el enunciado inverso se sigue de las razones usuales de simetría.

Hemos justificado que el tercer enunciado de (9) se sigue del primero. Ahora vamos a derivar el segundo a partir del primero y el tercero. Suponemos que $F(\eta)\in F(\beta)$; sea $\alpha=Od(F(\eta))$. Por 9.52 $\alpha<\beta<\eta$, y por (2) $\alpha\in a\cap\eta$. $F(\alpha)=F(\eta)$, y, por tanto, $F(\alpha)\in F(\beta)$; de $F(\eta)=F(\alpha)$ se sigue, por (9) 3., que que $F(\eta^*)=F(\alpha^*)$, y como por la hipótesis inductiva I $F(\alpha^*)\in F(\beta^*)$, concluimos que $F(\eta^*)\in F(\beta^*)$, es decir, $F(\eta)\in F(\beta)\rightarrow F(\eta^*)\in F(\beta^*)$. La implicación inversa se justifica por simetría. Por todo ello será suficiente con probar (9) 1., y, por las mismas razones de simetría, bastará con probar que:

$$\text{para cada } \alpha\in a\cap\eta\text{: } F(\alpha)\in F(\eta)\rightarrow F(\alpha^*)\in F(\eta^*).$$

Suponemos que $F(\alpha)\in F(\eta)$ y consideraremos casos separados según el índice n tal que $\eta\in\mathscr{R}(J_n)$.

1. Sea $\eta\in\mathscr{R}(J_0)$; por 12.51 $\eta^*\in\mathscr{R}(J_0)$ y de aquí que, por 9.35, $F(\eta)=F[\eta]$ y $F(\eta^*)=F[\eta^*]$. Entonces los dos miembros de la equivalencia (9) 1. son verdaderos y, por tanto, trivialmente equivalentes.

2. Sea $\eta\in\mathscr{R}(J_1)$. Entonces hay β, $\gamma\in a$ (por la propiedad de clausura de a) tales que $\eta=J_1(<\beta,\gamma>)$ y que, por 9.25, $\beta,\gamma<\eta$. Por 12.5 también $\eta^*=J_1(<\beta^*,\gamma^*>)$, de modo que, por 9.31, $F(\eta)=\{F(\beta), F(\gamma)\}$ y $F(\eta^*)=\{F(\beta^*), F(\gamma^*)\}$. Supuesto que $F(\alpha)\in F(\eta)$, tenemos que $F(\alpha)=F(\beta)$ o bien $F(\alpha)=F(\gamma)$, y entonces, por la hipótesis inductiva II, $F(\alpha^*)=F(\beta^*)$, o bien $F(\alpha^*)=F(\gamma^*)$, es decir, $F(\alpha^*)\in\{F(\beta^*), F(\gamma^*)\}$ o, en otras palabras, $F(\alpha^*)\in F(\eta^*)$.

3. Si $\eta \in \mathscr{R}(J_2)$, tenemos, como antes que $\eta = J_2(<\beta, \gamma>)$, con β, $\gamma \in a \cap \eta$, y $\eta^* = J_2(<\beta^*, \gamma^*>)$. Por 9.32 $F(\eta) = E \cap F(\beta)$ y $F(\eta^*) = E \cap F(\beta^*)$. Si, pues, $F(\alpha) \in F(\eta)$, entonces $F(\alpha) \in E$ y $F(\alpha) \in F(\beta)$. De la hipótesis de inducción I se sigue que $F(\alpha^*) \in F(\beta^*)$. Como además $F(\alpha) \in E$, hay x, y tales que $F(\alpha) = <x, y>$ y $x \in y$; $F(\alpha) \in r_\eta$, de modo que, por (7), x, $y \in r_\eta$, y entonces, por (8), $F(\alpha^*) = <x^*, y^*>$ y $x^* \in y^*$, esto es, $F(\alpha^*) \in E$. De aquí que $F(\alpha^*) \in E \cap F(\beta^*)$ o, dicho de otro modo, $F(\alpha^*) \in F(\eta^*)$.

4. Si $\eta \in \mathscr{R}(J_3)$, procedemos del mismo modo, de manera que, por 9.33, $F(\eta) = F(\beta) - F(\gamma)$ y $F(\eta^*) = F(\beta^*) - F(\gamma^*)$, con β, $\gamma \in a \cap \eta$. Supuesto que $F(\alpha) \in F(\eta)$, la hipótesis inductiva I aplicada a $F(\alpha)$ con $F(\beta)$ y $F(\gamma)$ da inmediatamente el resultado de que $F(\alpha^*) \in F(\eta^*)$.

5. Supongamos que $\eta = \mathscr{R}(J_n)$ para $n = 4$, 6, 7, 8. Como antes, $\eta = J_n(<\beta, \gamma>)$ y $\eta^* = J_n(<\beta^* \gamma^*>)$ con β, $\gamma \in a \cap \eta$, así que, por 9.34, $F(\eta) = F(\beta) \cap Q_n[F(\gamma)]$ y $F(\eta^*) = F(\beta^*) \cap Q_n[F(\gamma^*)]$. Supongamos ahora que $F(\alpha) \in F(\eta)$, es decir, $F(\alpha) \in F(\beta)$ y $F(\alpha) \in Q_n[F(\gamma)]$. Se sigue entonces que $F(\alpha^*) \in F(\beta^*)$; además, por la definición 4.52, hay un $x \in F(\gamma)$ tal que $<F(\alpha), x> \in Q_n$. Por (4) $x \in r$, y como $x \in F(\gamma) \in r_\eta$, por (5) $x \in r_\eta$, de manera que, por (8), $<F(\alpha^*), x^*> \in Q_n$. Como además $x^* \in F(\gamma^*)$, tenemos que $F(\alpha^*) \in Q_n[F(\gamma^*)]$, de donde se sigue que $F(\alpha^*) \in F(\eta^*)$.

6. Unicamente resta el caso $\eta \in \mathscr{R}(J_5)$. Como antes, $\eta = J_5(<\beta, \gamma>)$ y $\eta^* = J_5(<\beta^*, \gamma^*>)$, esto es, $F(\eta) = F(\beta) \cap P_2[F(\gamma)]$ y $F(\eta^*) = F(\beta^*) \cap P_2[F(\gamma^*)]$. Téngase en cuenta que $x \in P_2\ [y]$ es equivalente a $y \cap P_2^{-1}[\{x\}] \neq 0$. Si $F(\alpha) \in F(\eta)$, entonces $F(\alpha) \in F(\beta)$ y $F(\alpha) \in P_2[F(\gamma)]$, esto es, $F(\gamma) \cap P_2^{-1}[\{F(\alpha)\}] \neq 0$. $F(\alpha) \in r$ y $F(\gamma) \in r$, de modo que, por (1), $F(\gamma) \cap P_2^{-1}[\{F(\alpha)\}] \in r$, con lo cual hay, por (3), un $u \in r$ tal que $u \in F(\gamma) \wedge u \in P_2^{-1}[\{F(\alpha)\}]$. Entonces, por (5), $u \in r_\eta$; como $u \in F(\gamma)$ y $<u, F(\alpha)> \in P_2^{-1}$, se sigue de (8) que $u^* \in F(\gamma^*)$ y $<u^*, F(\alpha^*)> \in P_2^{-1}$, es decir, $F(\alpha^*) \in P_2[F(\gamma^*)]$; y $F(\alpha^*) \in F(\eta^*)$, puesto que $F(\alpha^*) \in F(\beta^*)$. Esto concluye la prueba de 12.6.

De 12.6 se sigue inmediatamente 12.3, puesto que si a, ξ satisfacen la hipótesis de 12.3, entonces ξ debe estar, por 12.4, clausurada respecto a J_n, y también respecto a C, H_1 y H_2

(porque $H_1(\alpha) \leqslant \alpha$ y $H_2(\alpha) \leqslant \alpha$, en virtud de 9.25, y $C(\alpha) \leqslant \alpha$ por definición). Entonces a y ξ satisfacen la hipótesis de 12.6.

Además, en la página 277 se probó que 12.2 se sigue de 12.3. De este modo queda demostrado que la hipótesis generalizada del continuo es una consecuencia de Σ y el axioma adicional $V=L$.[16]

Q. E. D.

Apéndice

La siguiente lista es una continuación de la de la página 247 y muestra, por el método allí explicado, que todos los relatores y functores que en estas páginas se han introducido con símbolos especiales (excepto **Bien-ordena** y $\sim$) son normales[17].

4.1. $Z \in X \times Y \leftrightarrow \exists uv(<u, v> = Z \wedge u \in X \wedge v \in Y)$

4.11. $Z \in X^2 \leftrightarrow Z \in X \times X$ (de modo similar para X^3)

4.2. **Rel** $X \leftrightarrow X \subseteq V^2$ (similarmente para $\mathbf{Rel}_3$)

4.4, 4.41, 4.411. $Z \in \mathbf{Inv}(X) \leftrightarrow \exists uv\ (Z = <u, v> \wedge <v, u> \in X)$ (similarmente para $\mathbf{Inv}_2$ y $\mathbf{Inv}_3$)

4.42. $Z \in X \cup Y \leftrightarrow Z \in X \vee Z \in Y$

4.43. $Z \in X - Y \leftrightarrow Z \in X \wedge \neg Z \in Y$

4.45. $Z \in \mathscr{R}(X) \leftrightarrow Z \in \mathscr{D}(\mathbf{Inv}(X))$

4.5. $Z \in X \restriction Y \leftrightarrow Z \in X \cap (V \times Y)$ (de modo similar para 1 (4.512))

4.52. $Z \in X[Y] \leftrightarrow Z \in \mathscr{R}(X \restriction Y)$

4.53. $Z \in X \circ Y \leftrightarrow \exists uvw\ (Z = <u, w> \wedge <u, v> \in X \wedge <v, w> \in Y)$

[16] ⟦Nota añadida en la segunda edición⟧: La prueba de consistencia puede extenderse al caso de que se añadan axiomas de infinitud más fuertes (por ejemplo, el axioma de existencia de números inaccesibles u otros dados por P. Mahlo (Mahlo [1911] y Mahlo [1913]), por la simple razón de que todos estos axiomas de infinitud implican su propia forma relativizada. Una observación similar se aplica también a las extensiones del sistema Σ mediante otros axiomas sugeridos por el significado intuitivo de los términos primitivos. (Añadido en 1966: esto es válido para los axiomas de infinitud y otros axiomas adicionales conocidos en aquel entonces [1951].)

[17] Véase la nota 12.

4.6. **Biun** $X \leftrightarrow$ **Un** $X \wedge$ **Un Inv**(X)

4.61. **Fnc** $X \leftrightarrow$ **Rel** $X \wedge$ **Un** X

4.63. X **Fn** $Y \leftrightarrow$ **Fnc** $X \wedge \mathscr{D}(X) = Y$

4.65. $Z \in X(Y) \leftrightarrow \exists u\ (Z \in u \wedge \forall v\ (<v, Y> \in X \leftrightarrow v = u))$

4.8. $Z \in \bigcup X \leftrightarrow \exists u (Z \in u \wedge u \in X)$ (la misma sentencia vale para **Max** y **Lim**)

4.84. $Z \in \mathscr{P}(X) \leftrightarrow \mathscr{C} Z \wedge Z \subsetneq X$

6.1. X **Conecta** $Y \leftrightarrow Y \subseteq X \cup$ **Inv**$(X) \cup I$

6.3. X **Sec**$_Z$ $Y \leftrightarrow Y \cap Z[X] \subseteq X \wedge X \subseteq Y$

6.31. $Z \in$ **Seg**$_T(X, Y) \leftrightarrow Z \in X \cap T[\{Y\}]$

6.4. Z **Isom**$_{PQ}(X, Y) \leftrightarrow$ **Rel** $Z \wedge$ **Biun** $Z \wedge \mathscr{D}(Z) = X \wedge \mathscr{R}(Z) = Y \wedge \forall uv(u, v \in X \rightarrow (<u, v> \in P \leftrightarrow <Z(u), Z(v)> \in Q))$

6.5. **Incl** $X \leftrightarrow \bigcup X \subseteq X$

6.6. **Ord** $X \leftrightarrow$ **Incl** $X \wedge E$ **Conecta** X

6.61. **Número-ordinal** $X \leftrightarrow$ **Ord** $X \wedge \mathscr{C} X$

α, β, γ, ..., son variables normales porque su ámbito de variabilidad es la clase Ω.

6.63, 6.64. $X < Y \leftrightarrow X \in Y$; $X \leqslant Y \leftrightarrow X \in Y \vee X = Y$

7.4. $Z \in X + 1 \leftrightarrow Z \in X \vee (Z = X \wedge \mathscr{C} Z)$

8.12. $X \approx Y \leftrightarrow \exists u($**Rel** $u \wedge$ **Biun** $u \wedge \mathscr{D}(u) = X \wedge \mathscr{R}(u) = Y)$

8.2. $Z \in |X| \leftrightarrow Z \in \Omega \wedge \forall \alpha (\alpha \approx X \rightarrow Z \in \alpha)$

8.48, 8.49. **Fin** $X \leftrightarrow \exists \alpha (\alpha \in \omega \wedge X \approx \alpha)$; **Inf** $X \leftrightarrow \neg$ **Fin** X

9.1. $Z \in \mathscr{F}_1(X, Y) \leftrightarrow Z \in \{X, Y\}$; $Z \in \mathscr{F}_2(X, Y) \leftrightarrow Z \in E \cap X$ (similarmente para $\mathscr{F}_3$, ..., $\mathscr{F}_8$)

9.41. $\mathscr{L} X \leftrightarrow X \subseteq L \wedge \forall u (u \in L \rightarrow u \cap X \in L)$.

Indice

I. *Símbolos especiales*

II. *Letras y combinaciones de letras*

(Obsérvese que las letras *C, F, R, S* aparecen también como variables antes de sus respectivas definiciones como constantes.)

Variables:

$X, Y, Z, ..., A, B, C$	para clases.
$x, y, z, ..., a, b, c$	para conjuntos.
$\alpha, \beta, \gamma, ...$	para números ordinales.
$n, m, ...$	para números naturales.
$\bar{X}, \bar{Y}, ..., \bar{A}, \bar{B}$	para clases constructibles.
$\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{a}, \bar{b}, ...$	para conjuntos constructibles.

III. *Términos técnicos*

Suplemento. Agosto 1965

En los últimos años Paul J. Cohen ha realizado decisivos progresos en los fundamentos de la teoría de conjuntos, inventando un poderoso método de construcción de modelos numerables. Este método proporciona respuestas a algunas de las más importantes cuestiones de consistencia. En particular Paul J. Cohen ha probado en (2) que la hipótesis del continuo de Cantor es indemostrable a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos (incluyendo los axiomas de infinitud del tipo de Mahlo o Levy), suponiendo que dichos axiomas sean consisten-

tes. En consecuencia, el valor que se otorgue a $2^{\aleph_\alpha}$ es casi completamente arbitrario. Véase (2), (9) y (3).

En el terreno de los axiomas de infinitud se han realizado otros importantes progresos, a saber:

1. Han sido deducidos los axiomas de infinitud de Mahlo a partir de un principio general que se refiere a la totalidad de los conjuntos y que fue introducido por A. Levy en (7). Da lugar a una jerarquía de diferentes y precisas formulaciones. Una de ellas, dada por P. Bernays, implica todos los axiomas de infinitud de Mahlo (véase (1)).

2. En (10) y (11) y en los artículos allí citados se han formulado sentencias que, si son verdaderas, son axiomas de infinitud extremadamente fuertes de un tipo totalmente nuevo, y han sido estudiadas sus consecuencias y mutuas implicaciones. En oposición a los axiomas de Mahlo, la verdad (o consistencia) de estos axiomas no se sigue inmediatamente de «las intuiciones básicas que subyacen a la teoría abstracta de conjuntos» (véase (10), pág. 134), y tampoco pueden, por supuesto, ser derivados a partir de ellos. Sin embargo, los nuevos axiomas están fundados en argumentos más bien fuertes de índole analógica, tales como el hecho de que las generalizaciones del teorema de representación de Stone a álgebras Booleanas con operaciones sobre infinitos elementos los implique. Como se conjeturó de un modo general en (5), página 520, uno de los nuevos axiomas implica la existencia de conjuntos no constructibles (véase (8)). Todavía no se ha determinado si alguno de ellos implica la negación de la hipótesis generalizada del continuo.

Una discusión general del problema del continuo de Cantor y de su relación con los fundamentos de la teoría de conjuntos se ofrece en (5) y (6).

Una versión ligeramente diferente de la prueba de consistencia llevada a cabo en estas páginas, versión que muestra más claramente su idea básica, se encuentra esbozada en (4).

Bibliografía

1. Bernays [1961].
2. Cohen [1963-64]. Véanse también las notas de sus conferencias en Harvard University durante la primavera de 1965 (que serán publicadas próximamente).
3. Easton [1964].
4. Gödel [1939].
5. Gödel [1947].
6. Reimpresión revisada de Gödel [1947] en Benacerraf y Putnam [1964].
7. Levy [1960].
8. Scott [1961a].
9. Solovay [1963].
10. Tarski [1960].
11. Keisler y Tarski [1964].

Introducción a:
La lógica matemática de Russell

El programa logicista (consistente en reducir la matemática a la lógica pura) había sido propuesto por Frege. Pero aún no había acabado de reducir la aritmética de los números naturales a la lógica cuando Russell descubrió contradicciones en su sistema formal. Russell hizo suyo el programa logicista de Frege, y trató de llevarlo a cabo en *Principia Mathematica*, donde redujo lo esencial de la matemática clásica a la teoría de tipos más los axiomas de infinitud y reducibilidad (lo que equivale a reducir la matemática clásica a la lógica más la teoría de conjuntos). Gödel había tomado el sistema formal de *Principia Mathematica* como punto de partida para varias de sus más importantes investigaciones, probando en [1930] la suficiencia semántica del fragmento de primer orden del cálculo lógico de *Principia* y en [1931] la incompletud del sistema formal entero. Respondiendo a una invitación de Paul A. Schilpp a participar en el volumen dedicado a Bertrand Russell en la *Library of Living Philosophers*, Gödel escribió una contribución sobre la lógica matemática de Russell, en la que somete a análisis y crítica la filosofía de la lógica de Russell, expuesta fundamentalmente en las dos introducciones (correspondientes a las dos primeras ediciones -1910 y 1927-) de *Principia.*

Fundamentalmente, Gödel critica la tendencia russelliana a prescindir de las entidades abstractas y a considerar nuestras afirmaciones sobre ellas como meras *façons de parler*. Russell pretende hacer una teoría sin clases, pero sólo lo consigue a base de aceptar la existencia de tantos conceptos (o «funciones proposicionales») como clases, con lo que se limita a poner distintos collares a los mismos perros. En la segunda edición de *Principia* pretende prescindir de los conceptos de tipos superiores, pero ello sólo lo consigue a costa de admitir sentencias de longitud infinita (incluso innumerable), con lo que el collar de las clases pasa ahora al perro de las sentencias infinitamente largas. Pero las sentencias infinitamente largas, los conceptos y las clases son intercambiables e igualmente abstractos (excepto para una «mente infinita», dice irónicamente Gödel).

Las entidades abstractas son imprescindibles y el intento russelliano de prescindir de ellas se salda en un fracaso.

Gödel aprovecha el análisis que hace de la lógica russelliana para exponer su propia filosofía (de tendencia «platónica» o realista) de la lógica: las clases y conceptos son objetos reales, que nosotros no construimos, sino que nos limitamos a caracterizar o describir. Por ello no hay inconveniente en aceptar definiciones impredicativas.

La contribución de Gödel apareció en 1944 bajo el título *Russell's Mathematical Logic* en las páginas 125-153 del volumen *The Philosophy of Bertrand Russell* (editado por Paul A. Schilpp), que formaba parte de la *Library of Living Philosophers*, publicada en Evanston, Illinois. Se encuentra también recogida en la antología Benacerraf y Putnam [1964], páginas 211-232.

Gödel escribió una nota final para añadir a la reproducción de su artículo en esa antología, nota que también incorporamos a nuestra traducción.

J. M.

LA LOGICA MATEMATICA DE RUSSELL

La lógica matemática, que no es sino una formulación completa y precisa de la lógica formal, tiene dos aspectos completamente diferentes. Por un lado es una parte de las matemáticas que trata de clases, relaciones, combinaciones de signos, etc., en vez de tratar de números, funciones, figuras geométricas, etc. Pero por otro lado es una ciencia previa a todas las demás, que contiene las nociones y principios que subyacen al resto de las ciencias. Leibniz fue el primero en concebir la lógica matemática, y precisamente en este segundo sentido, en su *Characteristica universalis*, de la cual habría constituido una parte central. Pero su idea de un cálculo lógico realmente suficiente para abarcar los razonamientos de las ciencias exactas no fue llevada a la práctica hasta casi dos siglos después, por obra de Frege y Peano[1] (aunque quizá no de la misma manera que Leibniz tenía en mente). Frege estaba principalmente interesado en el análisis del pensamiento y utilizó en primer lugar su cálculo para derivar la matemática a partir de la lógica pura. Peano, no obstante, estaba más interesado en sus aplicaciones dentro de las matemáticas y creó un simbolismo

[1] Sin duda Frege tiene la prioridad, pues su primera publicación sobre el tema, que ya contenía todo lo esencial, apareció diez años antes que la de Peano.

elegante y flexible que le permitió expresar cada teorema matemático, por complicado que fuera, de un modo perfectamente preciso, y a menudo muy conciso, mediante una fórmula.

La obra de Russell comenzó enmarcada en esta línea de pensamiento de Frege y Peano. Frege, a causa de sus concienzudos análisis de las deducciones, no había llegado más allá de las propiedades más elementales de las sucesiones de números naturales, mientras que Peano había expresado en el nuevo simbolismo una gran cantidad de teoremas matemáticos, aunque sin pruebas. Unicamente en *Principia Mathematica* se hizo uso completo del nuevo método para derivar gran parte de las matemáticas a partir de muy pocos axiomas y conceptos lógicos. Además la joven ciencia se enriqueció con un nuevo instrumento, la teoría abstracta de las relaciones. El cálculo de relaciones había sido desarrollado por Peirce y Schröder, pero con ciertas restricciones y con excesiva analogía al álgebra numérica. En *Principia* se trataron desde el punto de vista de las relaciones abstractas no sólo la teoría de conjuntos de Cantor, sino también la aritmética ordinaria y la teoría de la medida.

Es una lástima que esta primera presentación amplia y detallada de una lógica matemática y la derivación de las matemáticas a partir de ella ostente una falta de precisión formal tan grande en sus fundamentos (en *1-*21 de *Principia*) que represente un paso atrás en comparación con Frege. Lo que falta, ante todo, es una presentación exacta de la sintaxis del formalismo. Se omiten las consideraciones sintácticas incluso en casos en que resultan esenciales para la corrección de las deducciones, en particular en conexión con los «signos incompletos». Estos no se introducen mediante definiciones explícitas, sino mediante reglas que describen cómo las sentencias que los contengan pueden ser transformadas en sentencias que no los contengan. Para estar seguro de que esta transformación es posible y está unívocamente determinada (o respecto a qué fórmulas esto es así) y de que las reglas de inferencia se aplican también a las nuevas expresiones (o hasta qué punto esto es posible) es preciso realizar una inspección de todas las expresiones posibles, y esto sólo se puede llevar a cabo mediante consideraciones sintácticas. La cuestión es especialmente dudosa en lo que respecta a la regla de sustitución y al reemplazo de

signos definidos por su *definiens*. Si esta última regla se aplica a expresiones que contengan otros signos definidos es preciso que sea indiferente el orden de eliminación. Sin embargo no siempre es así ($\varphi!\hat{u} = \hat{u}(\varphi!u)$ es un contraejemplo). En *Principia* tales eliminaciones se efectúan siempre por medio de sustituciones en los teoremas correspondientes a las definiciones, de modo que lo que principalmente debiera haber sido probado es la regla de sustitución.

No pretendo, sin embargo, entrar en más detalles sobre el formalismo o el contenido matemático de *Principia*[2], sino que quisiera dedicar el resto del ensayo a la obra de Russell que trata del análisis de los conceptos y axiomas que subyacen a la lógica matemática. En este terreno Russell tuvo muchas ideas, algunas de las cuales se presentan con mayor claridad en sus primeros escritos (o sólo se presentan ahí). Me referiré, por tanto, frecuentemente a estos primeros escritos, aunque su contenido pueda en parte no concordar con el actual punto de vista de Russell.

En este terreno nos sorprende en primer lugar la pronunciada actitud realista de Russell, que él mismo manifiesta en muchos pasajes de sus escritos. Dice en su *Introduction to Mathematical Philosophy* (edición de 1920, pág. 169): «La lógica trata del mundo real, lo mismo que la zoología, aunque de sus rasgos más abstractos y generales.» Es verdad, sin embargo, que esta actitud ha ido disminuyendo gradualmente con el paso del tiempo[3] y también que siempre fue más fuerte en la teoría que en la práctica. Cuando se enfrentaba con un problema concreto, los objetos a analizar (por ejemplo, las clases o las proposiciones) se convertían pronto y en su mayor parte en «ficciones lógicas». Aunque quizá esto no signifique necesariamente (de acuerdo con el sentido en que Russell utilizaba este término) que estas cosas no existan, sino únicamente que no tenemos una percepción directa de ellas.

Russell extendió también en otro aspecto (en uno de sus

[2] Véase a este respecto el artículo de W. V. Quine sobre Whitehead en la colección «The Library of Living Philosophers».

[3] El pasaje antes citado fue suprimido en las posteriores ediciones de la *Introduction*.

primeros escritos) la analogía entre las matemáticas y una ciencia natural. Compara los axiomas de la lógica y las matemáticas con las leyes de la naturaleza, y la evidencia lógica con la percepción sensible, de modo que los axiomas no tienen que ser necesariamente evidentes por sí mismos, sino que su justificación estriba (como en la física) en el hecho de que permiten que estas «percepciones sensibles» sean deducidas; esto no excluiría, por supuesto, que tuviesen también una suerte de plausibilidad intrínseca similar a la que se da en la física. Creo que (en el supuesto de que «evidencia» se entienda de un modo suficientemente estricto) este punto de vista ha sido ampliamente justificado por posteriores desarrollos y se puede esperar que aún lo sea más en el futuro. Ahora resulta que (suponiendo que las matemáticas modernas son consistentes) la solución de ciertos problemas aritméticos exige el uso de supuestos que esencialmente trascienden la aritmética, esto es, el dominio del tipo de evidencias elementales e indiscutibles que mejor pueden ser comparadas con las percepciones sensibles. Parece, además, probable que se precisarán nuevos axiomas basados en alguna idea hasta el momento desconocida para decidir ciertas cuestiones de la teoría abstracta de conjuntos e incluso cuestiones relacionadas de la teoría de números reales. Quizá las dificultades aparentemente insuperables que otros problemas matemáticos han ido presentando durante muchos años se deban al hecho de que aún no se han encontrado los axiomas necesarios. Claro está que bajo estas circunstancias la matemática puede perder buena parte de su «absoluta certeza»; pero esto ya ha ocurrido hasta cierto punto por influjo de la moderna crítica de los fundamentos. Hay cierto parecido entre esta concepción de Russell y la idea de Hilbert de «suplementación de los datos de la intuición matemática» mediante axiomas tales como, por ejemplo, la ley del tercio excluso que, a juicio de Hilbert, no son dados en la intuición; la frontera que separa a los datos de los supuestos tendría, sin embargo, diferentes trazos según siguiésemos a Hilbert o a Russell.

Un ejemplo interesante del análisis que Russell lleva a cabo de los conceptos lógicos fundamentales es su tratamiento del artículo determinado «el». El problema es: ¿qué denotan o cuál

es la referencia[4] de las llamadas expresiones descriptivas (es decir, de expresiones como, por ejemplo, «el autor de *Waverley*» o «el rey de Inglaterra») y cuál es el significado de las sentencias en que aparecen? La respuesta aparentemente obvia de que, por ejemplo, «el autor de *Waverley*» se refiere a Walter Scott, conduce a dificultades insospechadas. Si admitimos, en efecto, el axioma aparentemente obvio de que la referencia de una expresión compuesta que contiene constituyentes que tienen a su vez una referencia depende únicamente de las referencias de estos constituyentes (independientemente del modo en que la referencia se exprese), entonces concluimos que la sentencia «Scott es el autor de *Waverley*» tiene la misma referencia que «Scott es Scott»; y esto conduce casi inevitablemente a la conclusión de que todas las sentencias verdaderas tienen la misma referencia (y también todas las falsas)[5]. Frege llegó realmente a esta conclusión; y lo entendía en un sentido casi metafísico que recuerda en cierto modo la doctrina eleática del «Uno». «Lo Verdadero» —según Frege— lo analizamos de modos diferentes mediante diferentes sentencias; siendo «lo Verdadero» el nombre que utiliza para la común referencia de todas las sentencias verdaderas[6].

Ahora bien, según Russell, lo que corresponde a las sentencias en el mundo exterior son los hechos. Evita, sin embargo, el uso del término «denota» o «se refiera a», y en vez de ello usa «indica» (en sus primeros escritos usa «expresa» o «es signo de») porque mantiene que la relación entre una sentencia y un hecho es bastante diferente de la que hay entre un nombre y la cosa nombrada. Utiliza además «denota» (en vez de «se refiere a») para la relación establecida entre cosas y nombres, de modo que

[4] Uso en lo siguiente el verbo «referirse a» porque corresponde a la palabra alemana «*bedeuten*», en el sentido que le dio Frege, que fue el primero en tratar este tema.

[5] Las únicas posteriores suposiciones que se precisarían para obtener una prueba rigurosa serían: (1) que «$\varphi(b)$» y la proposición «b es el objeto que tiene la propiedad φ y es idéntico a b» significan lo mismo, y (2) que cualquier proposición «habla acerca de algo», es decir, puede tomar la forma $\varphi(b)$. Se tendría además que usar el hecho de que para cualesquiera dos objetos a, b existe una proposición verdadera de la forma $\varphi(a, b)$, como, por ejemplo, $a \neq b$ o $a = a \wedge b = b$.

[6] Véase Frege [1892], pág. 35.

tanto «denota» como «indica» corresponderían al «*bedeuten*» de Frege. Entonces, de acuerdo con el punto de vista y la terminología de Russell, las sentencias verdaderas «indican» hechos y, correspondientemente, las falsas no indican nada[7]. La teoría de Frege se aplicaría entonces en un cierto sentido a las sentencias falsas, pues todas ellas indican la misma cosa, a saber, nada. Pero las diferentes sentencias verdaderas pueden indicar muy diferentes cosas. Este punto de vista relativo a las sentencias obliga a prescindir del principio antes mencionado sobre la referencia (es decir, en terminología de Russell, el correspondiente sobre la denotación e indicación) de las expresiones compuestas o a negar que una expresión descriptiva denote el objeto que describe. Russell optó por la última alternativa[8] considerando que una expresión descriptiva no denota nada, sino que sólo tiene significado en contexto; por ejemplo, la sentencia «el autor de *Waverley* es escocés» se define de modo que signifique: «existe una única entidad que escribió *Waverley* y quienquiera que escribiese *Waverley* es escocés.» Esto significa que una sentencia que contenga la expresión «el autor de *Waverley*» no afirma nada (hablando estrictamente) sobre Scott (pues no contiene ningún constituyente que denote a Scott), sino que es sólo un modo indirecto de afirmar algo sobre los conceptos que aparecen en la expresión descriptiva. Russell aduce fundamentalmente dos argumentos en favor de su punto de vista, a saber, (1) que una expresión descriptiva puede ser empleada sin que carezca de significado incluso en el caso de que el objeto descrito no exista (por ejemplo, en la sentencia «el actual rey de Francia no

---

[7] Debe distinguirse la indicación (*Bedeutung*) de una sentencia de lo que Frege llama su sentido (*Sinn*) que es el correlato conceptual del hecho objetivamente existente (o de «lo Verdadero»). Se podría esperar que en la teoría de Russell esto fuese un hecho posible (o más bien la posibilidad de un hecho) que existiría incluso en el caso de una proposición falsa. Pero Russell, como él mismo dice, nunca podría creer que cosas tan «curiosamente oscuras» existan. Está también, y en tercer lugar, el correlato psicológico del hecho, llamado «significación» y entendido en el último libro de Russell como la creencia correspondiente. «Sentencia», en oposición a «proposición», se usa para denotar la mera combinación de signos.

[8] No hizo ninguna afirmación explícita sobre la primera; pero parece que podría valer en el sistema lógico de *Principia*, aunque quizá más o menos vacuamente.

existe»). (2) Que muy bien se puede entender una sentencia que contenga una expresión descriptiva sin tener conocimiento del objeto descrito, mientras que parece imposible entender una sentencia sin conocer los objetos de los cuales se afirma algo. El hecho de que Russell no considere toda esta cuestión de la interpretación de descripciones como problema de meras convenciones lingüísticas, sino más bien como cuestión de verdad o falsedad es otro ejemplo de su actitud realista, a no ser quizá que estuviese intentando llevar a cabo una investigación meramente psicológica de los procesos reales de pensamiento. En cuanto a la cuestión en el sentido lógico, no puedo por menos que pensar que la teoría de las descripciones de Russell se ha limitado a eludir el problema planteado por la intrigante conclusión de Frege y que detrás de ella se esconde algo que no acabamos de entender completamente.

Parece que hay un aspecto puramente formal respecto al cual la teoría de las descripciones de Russell sería preferible. Definiendo el significado de las sentencias que contienen descripciones del modo antes indicado, evita en su sistema lógico cualquier axioma sobre la partícula «el», es decir, se hace explícita la analiticidad de los teoremas que versan sobre «el»; se puede probar que se siguen de la definición explícita del significado de las sentencias que contienen «el». Frege, por el contrario, tiene que suponer un axioma sobre «el», que naturalmente también es analítico, pero sólo en el sentido implícito de que se sigue del significado de los términos primitivos. Un examen más detallado muestra, sin embargo, que este avance de la teoría de Russell sobre la de Frege subsiste sólo en la medida en que se interpreten las definiciones como meras abreviaciones tipográficas y no como una introducción de nombres para los objetos descritos por las definiciones, y este rasgo es común a Frege y Russell.

Paso ahora a la investigación más importante de Russell en el campo del análisis de los conceptos de la lógica formal, a saber, la relativa a las paradojas lógicas y su solución. Analizando las paradojas a que había conducido la teoría de conjuntos de Cantor, las liberó de todos sus tecnicismos matemáticos, proporcionando así luz al asombroso hecho de que nuestras intuiciones lógicas (es decir, intuiciones relativas a nociones tales como verdad, concepto, ser, clase, etc.) son autocontradictorias.

Investigó entonces cuáles de estas suposiciones del sentido común deben ser corregidas, y de qué modo, y llegó a la conclusión de que el axioma erróneo consistía en suponer que para cualquier función proposicional existe la clase de objetos que la satisfacen, o que cada función proposicional existe «como una entidad separada»[9]; con lo cual se quiere indicar algo separable del argumento (siendo la idea que las funciones proposicionales se obtienen por abstracciòm a partir de proposiciones previamente dadas) y algo también distinto de la combinación de signos que expresa la función proposicional; es lo que se llama la noción o el concepto definido por ella[10]. La existencia de este concepto basta para las paradojas en su forma «intensional», donde el concepto de «no aplicarse a sí mismo» toma el lugar de la clase paradójica de Russell.

Rechazando la existencia en general de una clase o un concepto, queda por determinar bajo qué posteriores supuestos (relativos a la función proposicional) existen estas entidades. Russell señaló (loc. cit.) dos posibles direcciones para buscar un criterio de este tipo, que llamó, respectivamente, la teoría del zigzag y la teoría de la limitación de tamaño, y que quizá puedan llamarse más apropiadamente la teoría intensional y la extensional. La segunda establecería que la existencia de una clase o concepto depende de la extensión de la función proposicional (exigiendo que no sea demasiado grande) y la primera establecería la dependencia respecto a su contenido o significado (exigiendo un cierto tipo de «simplicidad» cuya formulación precisa constituiría el problema).

El rasgo más característico de la segunda (en oposición a la primera) consistiría en la no existencia de la clase universal o (en

---

[9] En el primer artículo de Russell sobre el tema (Russell [1906], pág. 29). Si se quisiera analizar paradojas como la de «el mentiroso» desde este punto de vista se tendría que suponer que las proposiciones universales (y particulares) involucran la clase de objetos a los que se refieren.

[10] Debe entenderse que «función proposicional» (sin la cláusula «como entidad separada») significa una proposición en la que uno o más constituyentes han sido designados como argumentos. Podría pensarse que el par constituido por la proposición y el argumento pueda a todos los efectos hacer el papel de la «función proposicional como entidad separada», pero debe observarse que este par (como una entidad) es de nuevo un conjunto o un concepto y por tanto puede no existir.

la interpretación intensional) de la noción de «algo» en un sentido irrestricto. La teoría axiomática de los conjuntos, como después fue desarrollada por Zermelo y otros, puede considerarse como una elaboración de esta idea en lo que respecta a las clases[11]. En especial, la expresión «no demasiado grande» puede especificarse (como mostró J. v. Neumann[12]) de modo que signifique «no equivalente al universo de todas las cosas» o, para ser más exactos, se puede suponer que una función proposicional determina una clase si y sólo si no existe ninguna relación (intensionalmente una función proposicional con dos variables libres) que asocie de un modo biunívoco a cada objeto con un objeto que satisfaga la función proposicional, y viceversa. Este criterio, sin embargo, no aparece en la base de la teoría sino como una consecuencia de los axiomas y puede, inversamente, reemplazar a dos de los axiomas (el axioma del reemplazo y el de elección).

También para la primera de las sugerencias de Russell, es decir, para la teoría del zig-zag, se ha establecido recientemente un sistema lógico que comparte ciertas características esenciales con este proyecto, a saber, el sistema de Quine[13]. No es, además, improbable que existan otras posibilidades interesantes en esta dirección.

El propio trabajo posterior de Russell relativo a la solución de las paradojas no siguió ninguna de las dos mencionadas direcciones que él mismo estableció, sino que se basó principalmente en una idea más radical, la «teoría de la inexistencia de clases», según la cual las clases o conceptos no existen *nunca* como objetos reales y las sentencias que contienen tales términos sólo tienen significado en la medida en que se interpreten como una *façon de parler*, un modo de hablar sobre otras cosas (véase la pág. 314). Sin embargo, en *Principia* y en algún otro sitio formuló ciertos principios, descubiertos en el curso del desarrollo de esta teoría, como principios lógicos generales sin mencionar

---

[11] Las paradojas intensionales pueden ser tratadas, por ejemplo, por la teoría simple de los tipos o la jerarquía ramificada, que no implican ninguna restricción indeseable cuando se aplican sólo a conceptos y no a conjuntos.

[12] Véase von Neumann [1929].

[13] Véase Quine [1937].

en absoluto su dependencia de la teoría de la inexistencia de clases. Voy a hablar en primer lugar de estos principios.

Me refiero en particular al principio del círculo vicioso, que prohíbe un cierto tipo de «circularidad» a la que se hace responsable de las paradojas. La falacia, según se sostiene, consiste en la circunstancia de que se definen (o se asumen tácitamente) totalidades cuya existencia implica la existencia de ciertos nuevos elementos de la misma totalidad, a saber, elementos definibles únicamente en términos de la totalidad entera. Esto lleva a la formulación de un principio que dice que ninguna totalidad puede contener miembros definibles únicamente en términos de la totalidad, o miembros que involucran o presuponen esta totalidad (principio del círculo vicioso). Para que este principio sea aplicable a las paradojas intensionales se precisa aún aceptar otro principio, a saber, que «cada función proposicional presupone la totalidad de sus valores», y por tanto evidentemente también la totalidad de sus posibles argumentos[14]. (En otro caso el concepto de «no aplicarse a sí mismo» no presupondría ninguna totalidad (pues no involucra ninguna cuantificación)[15], y el principio del círculo vicioso no prevendría su aplicación a sí mismo.) Una consecuencia[16] es entonces un correspondiente principio del círculo vicioso para funciones proposicionales que dice que nada definido en términos de una función proposicional puede ser un posible argumento de esta función. El sistema al que se llega a partir de estos principios es la teoría de los órdenes en la forma adoptada, por ejemplo, en la primera edición de *Principia*, según la cual una función proposicional que contiene cuantificación referida a funciones proposicionales de orden n o pueda afirmarse significativamente de funciones proposicionales de orden n es de orden $n+1$ cuanto menos y el dominio de significación de una función proposicional, así como el ámbito de un cuantificador, deben estar restringidos siempre a un orden determinado.

Sin embargo, en la Introducción a la segunda edición de

---

[14] Véase Russell y Whitehead [1910-13], vol. I, pág. 39.

[15] Los cuantificadores son los dos signos $\exists x$ y $\forall x$, que significan, respectivamente, «existe un objeto x» y «para todos los objetos x». La totalidad de los objetos x a los que se refieren se llama su dominio o ámbito de variabilidad.

[16] Véase Russell y Whitehead [1910-13], vol. I, pág. 47, sección IV.

Principia (pág. XLI y XLII) se dice que las funciones de orden superior al del mismo predicado (por tanto también las funciones definidas en términos del predicado, como, por ejemplo, en $p(k) \in k$) pueden aparecer «en un sentido limitado» como argumentos de un predicado de funciones; y en el apéndice B cosas de este tipo aparecen constantemente. Esto significa que virtualmente se ha renunciado al principio del círculo vicioso para funciones proposicionales. Este cambio está relacionado con el nuevo axioma que afirma que las funciones pueden aparecer en las proposiciones sólo «entre sus valores», es decir, extensionalmente, lo que tiene como consecuencia que cualquier función proposicional puede tomar como argumento una función del tipo apropiado cuya extensión esté definida (sin que importe qué orden de cuantificación se haya utilizado en la definición de su extensión). No hay ninguna duda de que estas cosas son totalmente inobjetables incluso desde el punto de vista constructivo (véase la pág. 308), supuesto que los cuantificadores estén siempre restringidos a órdenes determinados. Las paradojas se evitan mediante la teoría de los tipos simples[17], que en *Principia* se combina con la teoría de los órdenes (dando como resultado la «jerarquía ramificada»), pero de la cual es totalmente independiente y que no tiene nada que ver con el principio del círculo vicioso (véase la pág. 321).

En cuanto al propio principio del círculo vicioso, tal y como se formuló en la página 306, debe destacarse que, correspondiendo a las expresiones «definible en términos de», «involucra» y «presupone», tenemos tres principios diferentes, el segundo y el tercero de los cuales son mucho más plausibles que el primero.

---

[17] Por «teoría de los tipos simples» entiendo la doctrina que dice que los objetos del pensamiento (o, según otra interpretación, las expresiones simbólicas) se dividen en tipos, a saber: individuos, propiedades de individuos, relaciones entre individuos, propiedades de tales relaciones, etc. (con una jerarquía similar para las extensiones) y las sentencias de la forma: «*a* tiene la propiedad φ», «*b* está en la relación *R* con *c*», etc., no tienen significado si *a*, *b*, *c*, *R*, φ no son de los tipos adecuados. Los tipos mixtos (tales como las clases que contengan individuos y clases de individuos) y, por tanto, también los tipos transfinitos (tales como la clase de todas las clases de tipos finitos) quedan excluidos. Un análisis más detallado muestra que la teoría de los tipos simples basta para evitar también las paradojas epistemológicas. (Véase Ramsey [1926] y Tarski [1936], pág. 399.)

El primero de ellos es el que tiene un interés especial, pues sólo él prohíbe las definiciones impredicativas[18], e impide por ello la derivación de las matemáticas a partir de la lógica efectuada por Dedekind y Frege, al tiempo que destruye gran parte de las matemáticas modernas. Se puede demostrar que el formalismo de la matemática clásica no satisface el principio del círculo vicioso en esta primera forma, pues los axiomas implican la existencia de números reales que sólo son definibles en este formalismo por referencia a todos los números reales. Como la matemática clásica es construible a partir de *Principia* (incluyendo el axioma de reducibilidad), se sigue que incluso *Principia* (en su primera edición) no satisface el principio del círculo vicioso en esta primera formulación si «definible» significa «definible dentro del sistema», y no se conoce ningún otro método de definir fuera del sistema (o fuera de otros sistemas de matemática clásica) que los que ya involucran totalidades más amplias que las que aparecen en los sistemas.

Prefiero considerar esto como una prueba de que el principio del círculo vicioso es falso que como una prueba de que la matemática clásica es falsa, pero esto es además plausible por sí mismo. En efecto, se puede, antes que nada, negar, con buenos fundamentos, que la referencia a una totalidad implique necesariamente una referencia a cada uno de sus elementos o, en otras palabras, que «todos» signifique lo mismo que una conyunción lógica infinita. Se puede, por ejemplo, seguir la sugerencia de Langford y Carnap[19] e interpretar «todos» de modo que signifique analiticidad, necesidad o demostrabilidad. Este punto de vista tiene dificultades; pero no hay duda de que así desaparece la circularidad de las definiciones impredicativas.

Parece, en segundo lugar, que, incluso si «todos» significa una conyunción infinita, el principio del círculo vicioso en esta

---

[18] Se trata de definiciones de un objeto α por referencia a la totalidad a la que α mismo (y quizá también cosas definibles en términos de α) pertenece. Así, por ejemplo, si se define una clase α como la intersección de todas las clases que satisfagan una condición φ y se concluye entonces que α es también un subconjunto de las clases definidas en términos de α (en el supuesto de que satisfagan φ).

[19] Véase Carnap [1931], pág. 103; Carnap [1937], pág. 162, y Langford [1927], pág. 599.

primera formulación se aplica sólo cuando nosotros mismos hemos construido las entidades en cuestión. En este caso está claro que debe existir una definición (a saber, la descripción de la construcción) que no se refiera a una totalidad a la que el objeto definido pertenezca, pues la construcción de una cosa no puede, en efecto, basarse en una totalidad de cosas a la que la cosa que ha de ser construida pertenezca. Si, sin embargo, se trata de un problema de objetos que existen independientemente de nuestras construcciones, entonces no hay nada absurdo en la existencia de totalidades que contengan miembros que puedan ser descritos (esto es, caracterizados unívocamente)[20] sólo por referencia a esa totalidad[21]. Un tal estado de cosas ni siquiera contradiría a la segunda forma del principio del círculo vicioso, pues no se puede decir que un objeto descrito por referencia a una totalidad «involucre» esa totalidad, aunque la descripción sí lo haga; no contradiría tampoco la tercera forma si «presupone» significa «presupone la existencia» y no «presupone la cognoscibilidad».

De este modo parece que el principio del círculo vicioso se aplica en su primera forma sólo si se toma el punto de vista constructivista[22] (o nominalista) respecto a los objetos de la lógica y las matemáticas y en particular respecto a las proposiciones, clases y nociones, esto es, si se entiende, por ejemplo, por una noción un signo junto con una regla para traducir las sentencias que lo contengan a sentencias que no lo contengan, de modo que un objeto independiente denotado por el signo aparezca como una mera ficción[23].

Sin embargo, también pueden concebirse las clases y los

[20] Se dice que una función proposicional $\varphi(x)$ describe a un objeto a si $\varphi(x)$ es verdadera cuando $x=a$ y en ningún otro caso.

[21] Véase Ramsey [1926], pág. 338.

[22] Usaré de ahora en adelante el término «constructivismo» como un término general que comprenda tanto estos puntos de vista como tendencias tales como la que se encarna en la teoría de la «inexistencia de clases» de Russell.

[23] Se podría pensar que es imposible concebir las nociones de este modo por la razón de que las sentencias en que se traducen tienen que contener a su vez nociones, de modo que se efectuaría un regreso al infinito. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de mantener este punto de vista en lo que respecta a todas las nociones más abstractas, como las del segundo tipo o tipos superiores o respecto a todas las nociones, excepto para los términos primitivos, que serán sólo unos pocos.

conceptos como objetos reales, a saber, las clases como «pluralidades de cosas» o como estructuras que consistan en una pluralidad de cosas, y los conceptos como las propiedades y las relaciones de las cosas que existen independientemente de nuestras definiciones y construcciones.

Me parece que la aceptación de tales objetos es tan legítima como la aceptación de los cuerpos físicos y que hay tantas razones para creer en la existencia de aquéllos como en la de éstos. Son necesarios para obtener un sistema de matemáticas satisfactorio en el mismo sentido en que los cuerpos físicos lo son para una teoría satisfactoria de nuestras percepciones sensibles, y en ambos casos es imposible interpretar los enunciados acerca de estas entidades como enunciados acerca de «datos», es decir, en el último caso acerca de las percepciones sensibles.

El mismo Russell concluyó en el último capítulo de su libro *Meaning and Truth,* aunque «con vacilaciones» que existen «universales», aunque aparentemente quería limitar esta afirmación a los conceptos de percepciones sensibles, lo cual no sirve para nada al lógico. Usaré el término «concepto» de ahora en adelante exclusivamente en este sentido objetivo. Una diferencia formal entre las dos concepciones de las nociones sería que en el sentido constructivista se puede suponer que cualesquiera dos definiciones diferentes de la forma $\alpha(x)=\varphi(x)$ definen diferentes nociones. (En particular éste sería el caso en la interpretación nominalista del término «noción» antes sugerida, pues dos de estas definiciones proporcionan diferentes reglas de traducción para las proposiciones que contengan a α.) Por el contrario, esto no es en modo alguno lo que pasa con los conceptos, pues la misma cosa puede ser descrita de modos diferentes. Incluso podría ser que el axioma de extensionalidad[24] o al menos algo parecido valiese para los conceptos. Se puede ilustrar la diferencia mediante la siguiente definición del número dos: «Dos es la noción bajo la que caen todos los pares y nada más.» Hay ciertamente más de una noción en el sentido constructivista que

[24] Es decir, que dos propiedades diferentes no pertenecen exactamente a las mismas cosas, que es, en cierto modo, un correlato del *Principium identitatis indiscernibilium* de Leibniz, que dice que no hay dos cosas diferentes que tengan exactamente las mismas propiedades.

satisfaga esta condición, pero debe haber una «forma» o «naturaleza» común a todos los pares.

Como el principio del círculo vicioso se aplica en su primera forma a las entidades construidas, en la lógica constructivista son inadmisibles las definiciones impredicativas y la totalidad de las nociones, clases o proposiciones. Una definición impredicativa requeriría construir una noción mediante una combinación de un conjunto de nociones al que la misma noción que ha de ser formada pertenece. Entonces si se intenta retraducir una sentencia que contenga un signo de una noción definida impredicativamente, resulta que se obtiene una sentencia que sigue conteniendo un signo de la noción en cuestión[25]. Cuanto menos esto es así si «todos» significa una conyunción infinita; la idea de Carnap y Langford (mencionada en la pág. 308) no podría ayudarnos en esto, pues si se introduce la demostrabilidad de un modo compatible con la consideración constructivista de las nociones, entonces estaría dividida en una jerarquía de órdenes y esto impediría obtener los resultados deseados[26]. Como Chwistek ha mostrado[27], es incluso posible, bajo ciertos supuestos admisibles en la lógica constructiva, derivar una contradicción a partir de la admisión irrestricta de las definiciones impredicativas. Más específicamente, ha probado que el sistema de los tipos simples se vuelve contradictorio si se le añade el «axioma de intensionalidad», que dice (más o menos) que a definiciones diferentes corresponden nociones diferentes. Ya se ha indicado, sin embargo, que se puede suponer que este axioma vale para las nociones en el sentido constructivista.

En cuanto a los conceptos, el aspecto de la cuestión cambia completamente. Como se supone que los conceptos existen objetivamente, parece entonces que no hay objeciones a hablar de todos ellos (véase la pág. 316) ni a describir alguno por referencia a los demás (o al menos a los de un tipo determinado). Se puede, no obstante, preguntar si este punto de vista no es

---

[25] Véase Carnap [1931].

[26] El programa es, a pesar de todo, interesante, pues muestra de nuevo la constructibilidad de nociones que pueden ser afirmadas significativamente de nociones de orden arbitrariamente alto.

[27] Véase Chwistek [1932-33], pág. 367.

también refutable para los conceptos, puesto que conduce a cosas tan «absurdas» como que existen propiedades φ tales que $\varphi(a)$ consiste en un determinado estado de cosas que involucre todas las propiedades (incluyendo a φ misma y a las propiedades definidas en términos de φ), lo que significaría que el principio del círculo vicioso no es válido ni siquiera en su segunda forma para los conceptos o las proposiciones. No hay duda de que la totalidad de las propiedades (o de las de un tipo dado) lleva a situaciones de este tipo, pero no creo que contenga nada absurdo[28]. Es cierto que tales propiedades φ (o tales proposiciones $\varphi(a)$) tendrán que contenerse a sí mismas como constituyentes de su contenido significativo y de hecho de muchas maneras, a causa de las propiedades definidas en términos de φ; pero esto sólo impide construir su significado (es decir, explicarlo como una afirmación sobre las percepciones sensibles o cualesquiera otras entidades no conceptuales), lo cual no es una objeción para quien adopte el punto de vista realista. Tampoco es autocontradictorio que una parte propia sea idéntica (no meramente igual) al todo, como se puede ver en el caso de estructuras en el sentido abstracto. La estructura de las sucesiones de números naturales, por ejemplo, se contiene a sí misma como una parte propia, y es fácil ver que existen también estructuras que contienen infinitas partes diferentes cada una de las cuales contiene a toda la estructura como una parte. Existen además, incluso en el dominio de la lógica constructivista, ciertas aproximaciones a esta reflexividad de las propiedades impredicativas, a saber, proposiciones que no se contienen a sí mismas como parte de su significado, pero sí contienen su propia deducibilidad formal[29]. La deducibilidad formal de una proposición (en el caso de que los axiomas y las reglas de inferencia sean correctos) implica esta

[28] El sistema formal correspondiente a este punto de vista tendría, en vez del axioma de reducibilidad, la regla de sustitución de funciones descrita, por ejemplo, en Hilbert-Bernays [1934], vol. I, pág. 90, aplicada a variables de cualquier tipo junto con ciertos axiomas de intensionalidad requeridos por el concepto de propiedad y que, sin embargo, serían más débiles que los de Chwistek. Debería observarse que este punto de vista, si se combina con una solución de las paradojas parecida a la indicada en la página 322, no implica necesariamente la existencia de conceptos que no puedan ser expresados en el sistema.

[29] Véase Gödel [1931], pág. 173, o Carnap [1937], pág. 35.

proposición y en muchos casos es equivalente a ella. Además existen sin ninguna duda sentencias que se refieren a la totalidad de las sentencias, a la que ellas mismas pertenecen, como, por ejemplo, la sentencia: «Cualquier sentencia (de un lenguaje dado) contiene al menos una palabra relacional.»

Este punto de vista sobre las propiedades impredicativas obliga, por supuesto, a buscar otra solución para las paradojas, según la cual la falacia (es decir, el axioma erróneo subyacente) no consista en suponer cierta reflexividad de los términos primitivos, sino en otros supuestos sobre ellos. Una tal solución puede encontrarse de momento en la teoría de los tipos simples y quizá, en el futuro, en el desarrollo de las ideas esbozadas en las páginas 305 y 323. Naturalmente, todo esto sólo se refiere a los conceptos. En cuanto a las nociones en el sentido constructivista, no hay duda de que las paradojas se deben a un círculo vicioso. No es sorprendente que las paradojas tengan diferentes soluciones, según las diferentes interpretaciones de los términos.

En cuanto a las clases en el sentido de pluralidades o totalidades, parecería que tampoco son creadas por sus definiciones, sino meramente descritas y que por tanto no se les aplica el principio del círculo vicioso en su primera forma. Incluso pienso que existen interpretaciones del término «clase» (a saber, como cierto tipo de estructuras) a las que ni siquiera se les aplica en su segunda forma[30]. Pero, a la vista del desarrollo de las matemáticas contemporáneas, se puede incluso suponer que se aplica en su segunda forma, lo cual para las clases consideradas como meras pluralidades es, además, una suposición muy plausible. Se llega entonces a algo parecido al sistema de axiomas para la teoría de conjuntos de Zermelo, es decir, se dividen los conjuntos en «niveles», de tal modo que sólo los conjuntos de los niveles más bajos puedan ser elementos de los conjuntos de niveles más altos (esto es, $x \in y$ es falso siempre que x sea de un nivel superior al de y). No hay ninguna razón, considerando las clases en este sentido, para excluir mezclas de niveles en un conjunto y niveles transfinitos. El lugar del axioma

[30] Se encuentran ideas que van en esta dirección en los siguientes artículos: Mirimanoff [1917] y Mirimanoff [1917-20]. Véase en especial la página 212 del vol. 19.

de reducibilidad lo toma ahora el axioma de formación de clases (el *Aussonderungsaxiom* de Zermelo), que dice que para cada nivel y para cualquier función proposicional $\varphi(x)$ existe el conjunto de los x de este nivel para los cuales $\varphi(x)$ es verdad, y parece que esto se sigue del concepto de clases como pluralidades.

Russell aduce dos razones en contra de la consideración extensional de las clases, a saber, la existencia de (1) la clase vacía, que no puede ser una colección, y (2) las clases unitarias, que tendrían que ser idénticas a sus únicos elementos. Pero me parece que estos argumentos sólo podrían, en último caso, probar que la clase vacía y las clases unitarias (en tanto que distintas de sus únicos elementos) son ficciones (introducidas para simplificar los cálculos como los infinitos puntos en la geometría), pero no que todas las clases son ficciones.

Pero las paradojas han creado en Russell una tendencia pronunciada a construir la lógica sin recurrir, en la medida de lo posible, a aceptar la existencia objetiva de entidades como clases y conceptos. Esto conduce a la formulación de la ya mencionada «teoría de la inexistencia de clases», según la cual se introducen las clases y los conceptos como una *façon de parler*. También las proposiciones (en particular las que contienen cuantificación)[31] fueron antes o después incluidas en este plan, lo cual no es más que una consecuencia lógica de este punto de vista, pues, por ejemplo, las proposiciones universales, consideradas como entidades que existen objetivamente, pertenecen sin duda ninguna a la misma categoría de objetos ideales que las clases y los conceptos, y conducen a las mismas paradojas si se admiten sin restricciones. En cuanto a las clases, se llevó realmente a cabo este programa, es decir, se establecieron explícitamente las reglas para traducir las sentencias que contienen nombres de clases o el término «clase» a sentencias que no los contienen; y la base de la teoría, es decir, el dominio de sentencias en que se traducen las demás, es clara, de modo que (dentro del sistema de *Principia*) se puede prescindir de las clases, pero sólo si se acepta la existencia de un concepto siempre que se quiera construir una clase. Cuando se llega a los conceptos y a la interpretación de las

---

[31] Véase Russell [1906], pág. 627.

sentencias que los contienen o que contienen algún término sinónimo, el asunto no está de ningún modo tan claro. En primer lugar, algunos de ellos (las relaciones y predicados primitivos tales como «más frío» o «rojo») aparentemente tienen que ser considerados como objetos reales[32]; todos los demás (en particular, según la segunda edición de *Principia*, todas las nociones de tipo superior al primero, y con ellas todas las nociones lógicamente interesantes) aparecen como algo construido (es decir, como algo que no pertenece al «inventario» del mundo); pero ni el dominio básico de proposiciones en términos de las cuales todo se ha de interpretar finalmente ni el método de interpretación están tan claros como en el caso de las clases.

Todo este esquema de la teoría de la inexistencia de clases es de gran interés, en tanto que es uno de los pocos exponententes, llevado a cabo en detalle, de la tendencia a eliminar la aceptación de la existencia de objetos exteriores a los «datos» y a reemplazarla por construcciones sobre la base de estos datos[33]. En este caso el resultado ha sido esencialmente negativo; es decir, las clases y los conceptos introducidos de este modo no tienen todas las propiedades exigidas para su uso en matemáticas, a menos que se introduzcan axiomas especiales para los datos (por ejemplo, el axioma de reducibilidad), que en esencia significan que en los datos existe ya el tipo de objetos que han de ser construidos, o se acepte la ficción de que se pueden formar proposiciones de longitud infinita[34] (incluso innumerable), esto es, se opere con funciones veritativas de infinitos argumentos sin que importe si se pueden construir o no. Pero una función veritativa de este tipo, ¿qué es sino un tipo especial de extensión (o estructura) infinita, más complicada incluso que una clase y dotada además de un significado hipotético que sólo puede comprender una mente infinita? Todo esto sólo es una verificación del punto de vista antes defendido de que la lógica y las

---

[32] En el apéndice C de *Principia* se esboza un método mediante el cual éstos podrían también construirse por medio de ciertas relaciones de similaridad entre proposiciones atómicas de tal modo que estas últimas serían entonces las únicas que quedarían como objetos reales.

[33] Los «datos» deben entenderse aquí en un sentido relativo, como la lógica sin la suposición de la existencia de las clases y los conceptos en nuestro caso.

[34] Véase Ramsey [1926].

matemáticas (del mismo modo que la física) están construidas con axiomas que tienen un contenido real que no puede ser eludido.

Lo que se puede obtener a partir de una actitud constructivista es la teoría de los órdenes (véase la pág. 306); sólo ahora (y éste es el punto fuerte de la teoría) las restricciones involucradas no aparecen como hipótesis *ad hoc* para evitar las paradojas, sino como consecuencias inevitables de la tesis de que las clases, conceptos y proposiciones cuantificadas no existen como objetos reales. No es como si el universo de todas las cosas se dividiese en órdenes y se prohibiese hablar de todos los órdenes; sino, por el contrario, es posible hablar de todas las cosas que existen; sólo que las clases y los conceptos no están entre ellas; y si se han introducido como *façon de parler* resulta que esta misma extensión del simbolismo da lugar a la posibilidad de introducirlos de un modo más abarcador, y así indefinidamente. Para llevar a cabo este programa es preciso, sin embargo, presuponer la aritmética (o algo equivalente), lo que prueba únicamente que ni incluso esta lógica restringida puede construirse a partir de la nada.

En la primera edición de *Principia*, donde se trataba de construir efectivamente la lógica y las matemáticas, se abandonó en su mayor parte la actitud constructivista, pues el axioma de reducibilidad para tipos superiores al primero junto con el axioma de infinitud hacen que sea absolutamente necesaria la existencia de predicados primitivos de tipos arbitrariamente altos. Lo que queda de la actitud constructivista sólo es: (1) la introducción de clases como *façon de parler;* (2) la definición de $\neg$, $\vee$, $\wedge$, etc., aplicada a proposiciones que contengan cuantificadores (que incidentalmente resultó ser muy fecunda en una prueba de consistencia de la aritmética); (3) la construcción paso a paso de funciones de órdenes superiores a 1, lo cual, sin embargo, es superfluo, en virtud del axioma de reducibilidad; (4) la interpretación de las definiciones como meras abreviaciones tipográficas, lo que convierte cada signo introducido por definición en un signo incompleto (y no un signo que denote un objeto descrito por la definición). Pero el último punto es en gran medida una ilusión, puesto que, gracias al axioma de reducibilidad, existen siempre objetos reales de la forma de predicados

primitivos, o combinaciones de éstos, que corresponden a cada signo definido. Por último, también la teoría de las descripciones de Russell es algo que pertenece al orden de ideas constructivista.

En la segunda edición de *Principia* (o, para ser más exactos, en la introducción a ésta) se reasumió de nuevo la actitud constructivista. Se omite el axioma de reducibilidad y se dice explícitamente que todos los predicados primitivos son del tipo más bajo y que el único propósito de las variables (y evidentemente también de las constantes) de órdenes y tipos superiores consiste en permitir afirmar funciones veritativas más complicadas de proposiciones atómicas[35], lo que sólo es otro modo de decir que los órdenes y tipos superiores al primero son únicamente una *façon de parler*. Esta afirmación nos informa al mismo tiempo de qué tipo de proposiciones constituyen la base de la teoría, a saber, funciones veritativas de proposiciones atómicas.

Pero esto sólo carece de dificultades en el caso de que el número de individuos y predicados primitivos sea finito. En lo que respecta al caso opuesto (que es el más interesante para los propósitos de derivar las matemáticas), Ramsey (loc. cit.) se inclinó por considerar nuestra incapacidad para formar proposiciones de longitud infinita como un «mero accidente» del que el lógico no tiene por qué ocuparse. Naturalmente, esto resuelve las dificultades; pero debe observarse que, si se prescinde de la diferencia entre finito e infinito de esta manera, existe una interpretación de la teoría de conjuntos (y en consecuencia de las matemáticas) más simple y además de mayor alcance. A saber, en el caso de un número finito de individuos, el *aperçu* de Russell, de que las proposiciones sobre clases pueden interpretarse como proposiciones sobre sus elementos, llega a ser literalmente verdad, pues, por ejemplo, «$x \in m$» es equivalente a «$x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_k$», donde los a_i son los elementos de m; y «existe una clase tal que ...» es equivalente a «existen individuos $x_1, x_2, \dots, x_n$ tales que ...»[36], en el supuesto de que n

[35] Es decir, proposiciones de la forma *Sa*, *Rab*, etc., donde *S*, *R* son predicados primitivos y *a*, *b* individuos.

[36] Los x_i pueden, por supuesto y como siempre, ser total o parcialmente idénticos unos a otros.

sea el número de individuos del universo y que nos olvidemos de la clase vacía, que tendría que ser tratada mediante una cláusula adicional. Por supuesto, mediante una iteración de este procedimiento se pueden obtener clases de clases, etc., de modo que el sistema lógico obtenido se parecería a la teoría de los tipos simples, excepto en que estaría permitida la mezcla de tipos. La teoría axiomática de conjuntos aparece entonces como una extrapolación de este esquema para el caso de infinitos individuos o de una iteración infinita del proceso de formación de conjuntos.

El punto de vista de Ramsey es, naturalmente, cualquier cosa menos constructivista, a no ser que uno se refiera a construcciones de una mente infinita. Russell, en la segunda edición de *Principia*, tomó un camino menos metafísico, restringiéndose a las funciones veritativas que pueden ser efectivamente construidas. De este modo se llega de nuevo a la teoría de los órdenes que, sin embargo, aparece ahora bajo una nueva luz, a saber, como un método de construir funciones veritativas más y más complicadas de proposiciones atómicas. Pero parece que este procedimiento presupone de uno u otro modo la aritmética (véase el siguiente párrafo).

En cuanto a la cuestión de hasta qué punto la matemática puede construirse sobre esta base (sin suposiciones sobre los datos –es decir, sobre los predicados e individuos primitivos–, excepto, en cuanto sea necesario, el axioma de infinitud), está claro que no se puede obtener la teoría de los números reales en su forma presente[37]. En lo que respecta a la teoría de los números naturales, se afirma en la segunda edición de *Principia* que puede ser obtenida. La dificultad que hay que salvar es que en la definición de los números naturales como «aquellos cardinales que pertenecen a cualquier clase que contenga el 0 y contenga $x+1$, siempre que contenga x» la expresión «cualquier clase», debe referirse a un orden dado. Se obtienen entonces números naturales de diferentes órdenes, y resulta que la inducción completa puede aplicarse a números naturales de

[37] En cuanto a la cuestión de hasta qué punto es posible construir la teoría de los números reales presuponiendo los números naturales, véase H. Weyl [1932].

orden n sólo para propiedades de orden n; pero frecuentemente ocurre que la misma noción de número natural aparece en la propiedad a la que se le aplica la inducción. Esta noción es, sin embargo, de orden $n+1$ para los números naturales de orden n. Se ofrece, no obstante, en el apéndice B de la segunda edición de *Principia* una prueba de que los números naturales de cualquier orden superior a 5 son los mismos que los de orden 5, lo que, naturalmente, debería acabar con todas las dificultades. Pero la prueba, tal y como está formulada, ciertamente no es concluyente. En la prueba del lema principal *89.16, que dice que cada subconjunto α (de orden arbitrariamente alto)[38] de una clase inductiva β de orden 3 es a su vez una clase inductiva de orden 3, se aplica la inducción a una propiedad de β que contiene a α (a saber, $\alpha-\beta \neq \varnothing$, que, sin embargo, debería leerse $\alpha-\beta \notin \mathrm{Induct}_2$, porque (3) es evidentemente falsa). Esta propiedad es, sin embargo, de un orden >3 si α es de un orden >3. De este modo la cuestión de si la teoría de los números naturales puede obtenerse sobre la base de la jerarquía ramificada (o de hasta qué punto esto es posible) debe considerarse como no resuelta de momento. Se ha de observar, sin embargo, que incluso en el caso de que esta cuestión obtenga una respuesta afirmativa, no tendría ningún valor para el problema de si la aritmética se sigue de la lógica si se definen (como en la segunda edición de *Principia*) las funciones proposicionales de orden n como ciertas combinaciones finitas (aunque arbitrariamente complejas) (de cuantificadores, conectores, etc.), porque entonces se tiene que presuponer la noción de finitud, y este hecho se disimula tomando nociones tan complicadas como «función proposicional de orden n» de forma inanalizada como términos primitivos del formalismo y definiéndolas sólo en el lenguaje ordinario. Quizá se pueda replicar que en *Principia* ni se toma la noción de función proposicional de orden n como primitiva ni se define en términos de la noción de combinación finita, sino que más bien se definen los cuantificadores que se refieren a funciones proposicionales de orden n (que es todo lo que se precisa) como ciertas

[38] Por las posteriores aplicaciones de *89.17 y por la nota a 89.17 se ve que se pretende que la variable α sea de un orden indeterminado. La principal aplicación está en la línea (2) de la prueba de *89.24, donde se necesita el lema considerado para los α de órdenes arbitrariamente altos.

conyunciones y disyunciones infinitas. Pero entonces se puede preguntar: ¿Por qué no se definen los números naturales mediante la disyunción infinita: $x=0 \vee x=0+1 \vee x=0+1+1 \vee \ldots$, *ad infinitum*, eliminando de este modo los problemas relativos a la noción de inductividad? Esta objeción no tendría efecto si se entendiera por función proposicional de orden n «una función proposicional obtenible de funciones veritativas de proposiciones atómicas que no presupongan para su definición más totalidad que la de las funciones proposicionales de orden $<n$ y la de los individuos»; sin embargo, esta noción tiene una cierta falta de precisión.

La teoría de los órdenes resulta ser más fructífera si se considera desde un punto de vista puramente matemático, independientemente de la cuestión filosófica de si las definiciones impredicativas son admisibles. Considerada de este modo, es decir, como una teoría construida dentro del marco de la matemática ordinaria, donde se admiten las definiciones impredicativas, no hay ninguna objeción a que se extienda a órdenes transfinitos arbitrariamente altos. Creo que, incluso si se rechazan las definiciones impredicativas, no habría ninguna objeción a extenderla a los ordinales transfinitos que pueden construirse dentro de un marco general de órdenes finitos. Parece que la misma teoría exige una tal extensión, puesto que conduce automáticamente a la consideración de funciones en cuya definición uno se refiere a todas las funciones de órdenes finitos, y éstas serían funciones de orden ω. Si se admiten órdenes transfinitos, se puede probar un axioma de reducibilidad. Esto no ofrece, sin embargo, ninguna ayuda a la intención original de la teoría, porque el ordinal α –tal que cada función proposicional es extensionalmente equivalente a una función de orden α– es tan grande que presupone totalidades impredicativas. A pesar de todo se puede avanzar tanto en este camino que todas las impredicatividades se reduzcan a un tipo especial, a saber, a la existencia de ciertos números ordinales (o conjuntos bien ordenados) muy grandes y a la validez del razonamiento recursivo acerca de ellos. En particular la existencia de un conjunto bien ordenado de tipo de orden ω_1 ya basta para la teoría de los números reales. Además este teorema transfinito de reducibilidad permite probar la consistencia relativa del axioma de

elección, la hipótesis del continuo de Cantor e incluso la hipótesis generalizada del continuo (que dice que no hay ningún número cardinal entre la cardinalidad de un conjunto arbitrario y la del conjunto de sus subconjuntos) con los axiomas de la teoría de conjuntos y con los de *Principia.*

Vuelvo ahora con algo más de detalle a la teoría de los tipos simples que aparece en *Principia* en cuanto combinada con la teoría de los órdenes; la primera es (como ya se dijo antes) totalmente independiente de la segunda, puesto que evidentemente los tipos mixtos no contradicen en modo alguno el principio del círculo vicioso. De acuerdo con esto Russell basó también la teoría de los tipos simples en razones totalmente diferentes. La razón que adujo (además de su «concordancia con el sentido común») es muy similar a la de Frege, quien, en su sistema, ya aceptó la teoría de los tipos simples para las funciones, pero no pudo evitar las paradojas porque operaba con clases (o más bien con funciones extensionalmente consideradas) sin ninguna restricción. La razón es que una función proposicional (en virtud de la variable que contiene) es algo ambigua (o, como dice Frege, algo insaturada, falta de suplementación) y por tanto sólo puede aparecer en una proposición significativa eliminando su ambigüedad (por ejemplo, sustituyendo la variable por una constante o cuantificándola). En consecuencia, una función no puede reemplazar a un individuo en una proposición, pues el último no tiene ninguna ambigüedad que haya que eliminar, y las funciones de diferentes tipos de argumentos (es decir, de diferentes ambigüedades) no pueden reemplazarse una a otra; ésta es la esencia de la teoría de los tipos simples. Desde una perspectiva más nominalista (como la que se sugiere en la segunda edición de *Principia* y en *Meaning and Truth*) se tendría que reemplazar «proposición» por «sentencia» en las anteriores consideraciones (con los correspondientes cambios adicionales). Pero en ambos casos el argumento está en el orden de ideas de la teoría de la «inexistencia de clases», pues considera las nociones (o funciones proposicionales) como algo construido a partir de proposiciones o sentencias, dejando indeterminados uno o más de sus constituyentes. Las funciones proposicionales son en este sentido, y por así decirlo, «fragmentos» de proposiciones que no tienen significado en sí mismo, sino

que sólo lo tienen en la medida en que se usan para formar proposiciones combinando varios de ellos, lo cual sólo es posible cuando «encajan», es decir, cuando son de los tipos apropiados. Pero debería observarse que la teoría de los tipos simples (en oposición al principio del círculo vicioso) no puede seguirse en un sentido estricto del punto de vista constructivista, pues se pueden construir nociones y clases de otro modo, por ejemplo, como se indicó en la página 318, según el cual son posibles las mezclas de tipos. Si, por otro lado, se consideran los conceptos como objetos reales, la teoría de los tipos simples no es muy plausible, pues lo que uno esperaría que fuese un concepto (tal como, por ejemplo, la «transitividad» o el número dos) parecería ser algo situado más allá de sus varias «realizaciones» en los diferentes niveles y por tanto no existiría según la teoría de los tipos. A pesar de todo, parece que hay algo de verdad tras esta idea de realizaciones del mismo concepto en varios niveles y se puede esperar, en consecuencia, que la teoría de los tipos simples resulte ser útil o necesaria, al menos como escalón intermedio para llegar a un sistema más satisfactorio, un modo en el que ha sido ya utilizada por Quine[39]. También la noción russelliana de «ambigüedad de tipo» es un paso en esta dirección. Pero puesto que sólo añade ciertas convenciones simbólicas simplificadoras a la teoría de los tipos, *de facto* no va más allá de esta teoría.

Debería observarse que la teoría de los tipos proporciona una nueva idea para la solución de las paradojas, especialmente apropiada para su forma intensional. Consiste en hechar la culpa de las paradojas no al axioma de que cada función proposicional define un concepto o clase, sino a la suposición de que cada concepto, si se afirma de un objeto (u objetos) arbitrario como argumento, produce una proposición significativa. La objeción obvia de que cada concepto puede extenderse a todos los argumentos definiendo otro que produzca una proposición falsa siempre que el original carezca de significado puede rechazarse señalando que el concepto «aplicable significativamente» no tiene a su vez por qué ser siempre aplicable significativamente.

Puede considerarse la teoría de los tipos simples (en su interpretación realista) como la realización de este programa,

[39] Loc. cit., véase Quine [1937].

basado, sin embargo, en la suposición adicional siguiente relativa a la significatividad: «siempre que un objeto x pueda reemplazar a otro objeto y en una proposición significativa, puede hacer otro tanto en cualquier proposición significativa»[40]. Esto tiene, evidentemente, como consecuencia que los objetos se dividan en dominios de significatividad mutuamente excluyentes, cada uno de los cuales consta de los objetos que se puede intercambiar; y, por tanto, cada concepto tiene significado sólo para los argumentos que pertenezcan a uno de estos dominios, es decir, para una fracción infinitesimal de todos los objetos. Lo que hace que este principio sea particularmente sospechoso es que aceptarlo totalmente hace imposible su formulación como proposición significativa[41], porque x e y deben estar restringidos a dominios definidos de significatividad, que son los mismos o diferentes, y en cualquiera de los casos esta afirmación no expresa el principio ni siquiera parte de él. Otra consecuencia es que el hecho de que un objeto x sea (o no sea) de un tipo determinado tampoco puede expresarse mediante una proposición significativa.

No es imposible que se pueda llevar a cabo la idea de los dominios limitados de significatividad sin el anterior principio restrictivo. Incluso puede resultar que sea posible suponer que cada concepto tiene significado siempre excepto para ciertos «puntos límite», de modo que las paradojas fuesen algo análogo a la división por cero. Un sistema como éste sería más satisfactorio en el siguiente sentido: nuestras intuiciones lógicas seguirían siendo correctas excepto respecto a ciertas correcciones menores, es decir, podría considerarse como una representación esencialmente correcta, aunque algo «borrosa» del estado real de cosas. Desgraciadamente, los intentos efectuados en esta dirección han fracasado hasta el momento[42]; por otro lado, aún no se ha

---

[40] Russell formula un principio algo diferente, pero con los mismos efectos en *Principia*, vol. I, pág. 95.

[41] Esta objeción no se aplica a la interpretación simbólica de la teoría de los tipos, de la que se ha hablado en la página 322, pues no se tienen entonces objetos, sino signos de los diferentes tipos.

[42] Un sistema formal en este sentido es el de Church (véase Church [1932-33]), donde, sin embargo, la idea subyacente se expresa mediante la afirmación, un tanto confundente, de que se abandona la ley del tercio excluso. Se ha probado, sin embargo, que este sistema es inconsistente. Véase la nota 43.

probado tampoco la inviabilidad de este proyecto, a pesar de los teoremas de fuerte inconsistencia de Kleene y Rosser[43].

En conclusión, quiero decir unas pocas palabras sobre la cuestión de si los axiomas de *Principia* pueden considerarse analíticos (y en qué sentido). En lo que respecta a este problema debe indicarse que la analiticidad puede entenderse en dos sentidos. Puede tener, en primer lugar, el sentido puramente formal de que los términos que aparecen en ellos pueden definirse (ya sea explícitamente o mediante reglas para eliminarlos de las sentencias que los contengan) de modo que los axiomas y teoremas se conviertan en casos especiales de la ley de identidad y las proposiciones refutables en negaciones de esta ley. En este sentido incluso la teoría de los números naturales es demostrablemente no analítica en el supuesto de que se exija que las reglas de eliminación sólo permitan efectuar la eliminación en un número finito de pasos en cada caso[44]. Si se omitiese esta condición admitiendo, por ejemplo, sentencias de longitud infinita (e innumerable) como pasos intermedios en el proceso de reducción, se podría probar que todos los axiomas de *Principia* (incluyendo los axiomas de elección, infinitud y reducibilidad) son analíticos en ciertas interpretaciones (mediante consideraciones similares a las que nos hemos referido en la página 317)[45]. Pero esta observación es de dudoso valor, pues para probar la analiticidad se ha de presuponer la aplicación de toda la matemática a las sentencias de longitud infinita, de modo que, por ejemplo, sólo se puede probar que el axioma de elección es analítico presuponiendo que es verdadero.

En un segundo sentido se dice que una proposición es analítica cuando es válida «en virtud del significado de los conceptos que en ella aparecen», donde este significado quizá pueda ser indefinible (es decir, irreducible a algo más fundamental)[46]. Parece que todos los axiomas de *Principia*, en su primera

[43] Véase Kleene y Rosser [1935].

[44] Porque esto implicaría la existencia de un procedimiento de decisión para todas las proposiciones aritméticas. Véase Turing [1937].

[45] Véase también Ramsey, loc. cit. (en la nota 21), donde sin embargo no se puede obtener el axioma de infinitud porque se interpreta como referido a los individuos del mundo.

[46] Los dos significados del término *analítico* quizá puedan distinguirse como tautológico y analítico.

edición (excepto el axioma de infinitud), son analíticos en este sentido según ciertas interpretaciones de los términos primitivos, a saber, si el término «función predicativa» se reemplaza por «clase» (en el sentido extensional) o por «concepto» (omitiendo el axioma de elección), pues nada puede expresar mejor el significado del término «clase» que el axioma de las clases (véase la pág. 314) y el axioma de elección y, puesto que, por otro lado, el significado del término «concepto» parece implicar que cada función proposicional define un concepto[47]. La única dificultad está en que no percibimos con suficiente distinción los conceptos de «conjunto» y «clase», como lo prueban las paradojas. A la vista de esta situación, Russell tomó el camino de considerar como inexistentes tanto las clases como los conceptos (excepto los predicados primitivos, que carecen de interés lógico) y de reemplazarlos por nuestras propias construcciones. No se puede negar que este procedimiento haya conducido a ideas interesantes y a resultados valiosos incluso para quien tome el punto de vista opuesto. En conjunto, sin embargo, el resultado ha sido que sólo quedan fragmentos de la lógica matemática, a menos que las cosas condenadas se reintroduzcan en la forma de proposiciones infinitas o mediante axiomas tales como el de reducibilidad, que es demostrablemente falso (en el caso de infinitos individuos), a menos que se acepte la existencia o bien de las clases o bien de infinitas «*qualitates occultae*». Parece que esto es una indicación de que se debería tomar un camino más conservador que podría consistir en clarificar el significado de los términos «clase» y «concepto» y establecer una teoría

---

[47] Esta concepción no contradice la opinión, antes defendida, de que las matemáticas se fundan en axiomas con contenido real, pues la existencia misma del concepto, por ejemplo, de «clase» ya constituye un tal axioma; pues si se definen, por ejemplo, «clase» y «$\in$» como «los conceptos que satisfacen los axiomas», no es posible probar su existencia. Quizá se podría definir «concepto» en términos de «proposición» (véase la pág. 322) (aunque no pienso que éste sea un procedimiento natural); pero entonces se tendrían que aceptar ciertos axiomas sobre proposiciones que sólo son justificables en referencia al significado no definido de este término. Debe observarse que esta concepción de la analiticidad permite de nuevo que toda proposición matemática se reduzca al caso $a = a$, a saber, efectuando la reducción no en virtud de los términos que aparecen, sino en virtud de su significado, que nunca puede ser totalmente expresado mediante un conjunto de reglas formales.

consistente de clases y conceptos como entidades objetivamente existentes. Este es el camino que ha tomado el desarrollo actual de la lógica matemática y en el que el mismo Russell se ha visto forzado a entrar en partes más constructivas de su obra. Los mayores intentos realizados en esta dirección (algunos de los cuales han sido citados en este ensayo) son la teoría simple de los tipos (que es el sistema de la primera edición de *Principia* interpretado apropiadamente) y la teoría axiomática de conjuntos, y ambos han tenido éxito, al menos hasta el punto de que permiten la derivación de las matemáticas modernas y evitan al mismo tiempo todas las paradojas conocidas. Sin embargo, hay muchos síntomas evidentes de que los conceptos primitivos están necesitados de una mayor clarificación.

Parece razonable sospechar que esta comprensión incompleta de los fundamentos es la causa del hecho de que la lógica matemática no haya colmado hasta el momento las fuertes expectaciones de Peano y otros que (de acuerdo con los propósitos de Leibniz) habían esperado que facilitase las matemáticas teóricas hasta el mismo punto en que el sistema decimal facilita las computaciones numéricas. Pero ¿cómo se puede esperar resolver sistemáticamente problemas matemáticos por mero análisis de los conceptos que aparezcan si nuestros análisis no bastan por el momento ni para establecer los axiomas? No hay por qué desesperar. Leibniz no habló en sus escritos sobre la *Characteristica universalis* de un proyecto utópico; si hemos de creer sus palabras, desarrolló este cálculo del razonamiento considerablemente, pero esperó a publicarlo hasta que la semilla pudiese caer en suelo fértil[48]. Incluso llegó al punto[49] de estimar el tiempo que se precisaría para que unos pocos científicos selectos desarrollaran su cálculo hasta el extremo de que «la humanidad tuviese un nuevo tipo de instrumento que aumentase las capacidades de la razón mucho más de lo que un instrumento óptico haya ayudado nunca a la capacidad de la visión». Estimó el tiempo en cinco años, y aseguró que su método no era más difícil de aprender que las matemáticas o la filosofía de su

[48] Leibniz [1875-90], vol. 7, pág. 12. Véase también Vacca [1902-06] y el prefacio del primer volumen de Leibniz [1923 ss.].

[49] Leibniz [1875-90], vol. 7, pág. 187.

tiempo. Dijo además en repetidas ocasiones que su teoría, incluso en el estadio rudimentario hasta el que él mismo la había desarrollado, era la responsable de sus descubrimientos matemáticos; lo cual, es de esperar, incluso Poincaré reconocería como una prueba suficiente de su fecundidad.

Quisiera expresar mi agradecimiento al profesor Alonzo Church, de la Universidad de Princeton, por su ayuda en la corrección de las expresiones inglesas en numerosos lugares.

⟦Nota final añadida por Gödel en 1964⟧: El autor desea observar que (1) desde la publicación original de este artículo se han efectuado progresos en algunos de los problemas discutidos y que las formulaciones aquí ofrecidas pueden mejorarse en algunos lugares, y (2) que el término «constructivista» se utiliza en este artículo para referirse a un cierto tipo de constructivismo estrictamente anti-realista. Por ello su significado no es el mismo que se usa en las discusiones actuales sobre fundamentos de las matemáticas. Aplicado al estado actual de la lógica y de las matemáticas equivale a un cierto tipo de «predicatividad» y difiere, por tanto, de «intuicionísticamente admisible» y de «constructivo» en el sentido de la escuela de Hilbert.

Introducción a: *Observaciones ante la conferencia del bicentenario de Princeton sobre problemas matemáticos*

La Universidad de Princeton fue fundada en 1746. Para conmemorar su segundo centenario se celebró en 1946 un congreso de matemáticos ante el que Gödel fue invitado a hablar. En su conferencia Gödel comenzó resaltando el éxito conseguido con la definición precisa de la noción intuitiva de computabilidad. Una función numérica es computable o recursiva (o no lo es) en un sentido absoluto y con independencia de cualquier sistema formal. Otras nociones, como las de demostrabilidad y definibilidad, no han podido ser definidas de un modo absoluto, sino sólo relativamente a cierto sistema formal o a cierto lenguaje formal. Así, el concepto de demostrabilidad se precisa en un sistema formal como deducibilidad. Pero una misma sentencia puede ser deducible en un sistema formal, y no serlo en otro. El concepto de deducibilidad no es absoluto, sino relativo a un cálculo *K*. No podemos hablar de deducibilidad, sin más, sino sólo de deducibilidad en *K*. ¿No sería posible buscar nociones precisas absolutas de demostrabilidad y definibilidad, nociones trascendentes a cada sistema formal determinado, como lo es la de función recursiva?

Gödel ofrece dos sugerencias altamente especulativas, la de una noción de demostrabilidad basada en axiomas fuertes de infinitud, caracterizados únicamente por su forma y por ser

semánticamente verdaderos, y la de una noción de definibilidad sobre todos los ordinales, es decir, definibilidad en un lenguaje formal con innumerables signos primitivos (con nombres para todos los ordinales o, equivalentemente, con todos los ordinales mismos como signos primitivos). Esta última sugerencia, la más elaborada, podría constituir, si no una definición absoluta de definibilidad en general, sí al menos una definición absoluta de conjunto definido conforme a una ley o regla.

La conferencia de Gödel fue impresa por primera vez en Davis [1965], páginas 84-88, bajo el título *Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems of Mathematics* (Observaciones ante la Conferencia del Bicentenario de Princeton sobre problemas matemáticos).

J. M.

OBSERVACIONES ANTE LA CONFERENCIA DEL BICENTENARIO DE PRINCETON SOBRE PROBLEMAS MATEMATICOS

Tarski ha acentuado en su ponencia (y creo que con razón) la gran importancia del concepto de recursividad (o computabilidad de Turing). Me parece que esta importancia se debe en gran medida al hecho de que con este concepto se ha logrado por primera vez obtener una definición absoluta, es decir, independiente del formalismo elegido[1], de una noción epistemológica interesante. En todos los otros casos tratados previamente, tales como la demostrabilidad o la definibilidad, sólo hemos sido capaces de definir estas nociones en relación a un lenguaje dado y para cada lenguaje individual está claro que la noción así obtenida no es la que buscábamos. Sin embargo, en cuanto al concepto de computabilidad, aunque es simplemente un tipo especial de demostrabilidad o decidibilidad, la situación es diferente. Por una especie de milagro no es necesario distinguir órdenes, y el procedimiento diagonal no deja fuera la noción definida. Creo que esto debería animarnos a esperar que los mismo sea también posible en otros casos (tales como la

[1] Para ser más preciso: una función de números naturales es computable en cualquier sistema formal que contenga a la aritmética si y sólo si es computable en la aritmética, donde una función *f* se llama computable en *S* si hay en *S* algún término computable que represente a *f*.

demostrabilidad o la definibilidad). Es verdad que en estos otros casos tenemos ciertos resultados negativos, como la incompletud de los formalismos o la paradoja de Richard, pero un examen más atento muestra que estos resultados no imposibilitan bajo cualquier circunstancia el llevar a cabo la definición de tales nociones absolutas, sino que excluyen ciertos modos de definirlas o, cuanto menos, impiden que ciertos conceptos muy semejantes puedan ser definidos en un sentido absoluto.

Consideremos, por ejemplo, el concepto de demostrabilidad. Es bien sabido que cualquiera que sea el modo en que este concepto se precise mediante un formalismo, la contemplación del formalismo da lugar a nuevos axiomas tan evidentes y justificados como aquellos con los que se comenzó, y que este proceso puede ser repetido hasta lo transfinito. No puede, entonces, existir ningún formalismo que logre abarcar todos estos pasos; pero esto no impide que todos estos pasos (o por lo menos todos los que proporcionan algo nuevo al dominio de sentencias en que se está interesado) puedan ser descritos y reunidos de algún modo no constructivo. Por ejemplo, en la teoría de conjuntos las sucesivas extensiones pueden representarse muy apropiadamente mediante axiomas de infinitud más y más fuertes. Ciertamente es imposible dar una caracterización combinatoria y decidible de lo que es un axioma de infinitud, pero podría existir, por ejemplo, una caracterización del siguiente tipo: un axioma de infinitud es una sentencia que tiene una cierta estructura formal (decidible) y que además es verdadera. Un tal concepto de demostrabilidad puede tener la requerida propiedad de clausura, es decir, puede ser verdad que: cualquier deducción de un teorema de teoría de conjuntos efectuada en el nivel inmediatamente superior al de la teoría de conjuntos (es decir, cualquier deducción que contenga el concepto de verdad que acabo de usar) es reemplazable por una deducción a partir de un tal axioma de infinitud. No es imposible que para un concepto de demostrabilidad de este tipo valga algún teorema de completud que diga que cualquier sentencia expresable en teoría de conjuntos es decidible a partir de los axiomas actuales más alguna afirmación verdadera sobre el tamaño del universo de todos los conjuntos.

Permítaseme considerar un segundo ejemplo gracias al cual

voy a poder ofrecer algunas sugerencias en cierto modo más definidas. Se trata del concepto de definibilidad (o, para ser más exactos, de definibilidad matemática). Tenemos aquí también, correspondiendo a la jerarquía transfinita de sistemas formales, una jerarquía transfinita de conceptos de definibilidad. De nuevo no es posible reunir todos estos lenguajes en uno solo, mientras se tenga un concepto finitista del lenguaje, es decir, mientras se exija que el lenguaje tenga un número finito de signos primitivos. Pero resulta posible (al menos en cuanto es necesario para nuestros propósitos) si se omite esta condición, a saber, mediante un lenguaje que tenga tantos signos primitivos como niveles de la jerarquía de lenguajes se deseen considerar, es decir, tantos cuantos números ordinales hay. El modo más simple de hacerlo es tomar a los números ordinales como signos primitivos. De este modo se llega al concepto de definibilidad en términos de ordinales, es decir, definibilidad mediante expresiones que contengan nombres de números ordinales y constantes lógicas, incluyendo la cuantificación referida a conjuntos. Creo que este concepto debería ser investigado. Se puede probar, introduciendo la noción de verdad en este lenguaje totalmente transfinito, que tiene la requerida propiedad de clausura, es decir, que pasando al siguiente lenguaje no se obtienen nuevos conjuntos definibles (aunque sí se obtendrían nuevas propiedades definibles de conjuntos). El concepto de conjunto constructible que utilicé en la prueba de la consistencia de la hipótesis del continuo puede obtenerse de un modo similar, es decir, como un tipo de definibilidad en términos de ordinales; pero, comparando la constructibilidad con el concepto esbozado de definibilidad, se encontrará que en la definición de los conjuntos constructibles no se admiten todos los medios lógicos de definición. En especial, sólo se admite la cuantificación sobre conjuntos constructibles y no sobre todos los conjuntos en general. Esto tiene como consecuencia que se puedan definir realmente conjuntos, e incluso conjuntos de números naturales, que no se puede probar que sean constructibles (aunque, naturalmente, se puede suponer sin contradicciones) y creo que por esta razón la constructibilidad no puede considerarse como una formulación satisfactoria de la definibilidad. Pero, volviendo a la definición de definibilidad, pienso que se puede objetar que la introducción de todos

los ordinales como términos primitivos es una solución demasiado fácil de la cuestión y que el concepto obtenido de este modo no concuerda en absoluto con el concepto intuitivo que queremos precisar, pues existe una infinidad innumerable de conjuntos definibles en este sentido. Esta objeción tiene, sin duda, cierta justificación. Es, en efecto, plausible que todas las cosas que podamos concebir sean numerables incluso si prescindimos de la cuestión de la expresibilidad en algún lenguaje. Pero, por otro lado, hay mucho que decir en favor del concepto en consideración y, ante todo, que si el concepto de definibilidad matemática debe ser a su vez matemáticamente definible, entonces necesariamente todos los números ordinales tienen que ser definibles, porque en otro caso podríamos definir el primer número ordinal no definible y obtendríamos de ese modo una contradicción. No creo que esto signifique la imposibilidad de un concepto de definibilidad que satisfaga el postulado de numerabilidad, sino que contendría ciertos elementos extramatemáticos relativos a la psicología de los seres que se dedican a las matemáticas. Pero, prescindiendo de la respuesta que se pueda dar a esta cuestión, me inclinaría a pensar que la «definibilidad en términos de ordinales», incluso si no es una adecuada formulación de la «comprensibilidad por nuestras mentes», es al menos una formulación adecuada en un sentido absoluto de una propiedad de los conjuntos muy cercana a ésta, a saber, la propiedad de «estar formados según una ley» como contrapuesta a la de «estar formados por una elección aleatoria de elementos». Pues en los ordinales no hay, ciertamente, ningún tipo de aletoriedad y por tanto tampoco en los conjuntos definidos en términos de éstos. Esto es particularmente claro si consideramos la definición de los ordinales de von Neumann, pues no está basada en ninguna relación de buen orden de conjuntos, que muy bien podría contener cierta aletoriedad. Se habrá observado, naturalmente, que en los dos ejemplos que he dado los conceptos a los que hemos llegado o de los que nos hemos hecho una idea no son absolutos en el sentido estricto, sino sólo respecto a cierto sistema de cosas, a saber, los conjuntos descritos en la teoría axiomática de conjuntos, esto es, aunque existan deducciones y definiciones que no caigan bajo estos conceptos, estas deducciones y definiciones no proporcionan nada nuevo al dominio de

conjuntos y sentencias expresables en términos de «conjunto», «$\in$» y las constantes lógicas. La cuestión de si los dos conceptos epistemológicos considerados, o cualquier otro, pueden tratarse de un modo completamente absoluto es de naturaleza enteramente diferente. Pero, prescindiendo de si este concepto de definibilidad corresponde a ciertas nociones intuitivas o no, pienso que tiene cierto interés matemático intrínseco y en particular hay preguntas que surgen en conexión con él: (1) si los conjuntos definibles en este sentido satisfacen los axiomas de la teoría de conjuntos o no. Creo que esta cuestión se responderá afirmativamente y ello conducirá a otra prueba de la consistencia del axioma de elección, probablemente más simple. (2) Se puede probar que los ordinales necesarios para definir todos los conjuntos de números naturales que pueden ser definidos de este modo tienen una cota superior. Dudo que se pueda probar que esta cota superior es ω_1, como en el caso de los conjuntos constructibles.

Introducción a:
¿Qué es el problema del continuo de cantor?

En 1938 Gödel había descubierto que el axioma de elección y la hipótesis del continuo son compatibles con el resto de los axiomas de la teoría de conjuntos. Sin embargo, la situación de ambos es bien distinta. El axioma de elección resulta intuitivamente evidente para casi todos los matemáticos (excepto para los constructivistas) y además está involucrado en la prueba de multitud de teoremas importantes. Por eso comenta Gödel que «desde prácticamente todos los puntos de vista posibles (el axioma de elección) está tan bien fundamentado hoy en día como los otros axiomas de la teoría de conjuntos». La hipótesis de continuo, por el contrario, es una conjetura cantoriana carente de evidencia intrínseca y su fecundidad demostrativa (fuera de su campo) es muy escasa.

Cantor había conjeturado que un subconjunto cualquiera de puntos de un continuo (una línea ó una superficie, etc.) o tiene la cardinalidad del conjunto de los números naturales, $\aleph_0$, o tiene la cardinalidad del conjunto de las partes del conjunto de los números naturales, $2^{\aleph_0}$. En general, Cantor había conjeturado que entre un cardinal infinito cualquiera $\aleph_\alpha$ y el cardinal $2^{\aleph_\alpha}$ no hay ninguna cardinalidad intermedia, es decir, para cada α: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

El problema del continuo es el problema de determinar si esta hipótesis cantoriana es verdadera o falsa. Si su negación se siguiera de los otros axiomas de la teoría de conjuntos, podríamos considerar que la hipótesis es falsa. Pero Gödel había probado en 1938 que su negación no se sigue de los otros axiomas de la teoría de conjuntos. Podría pensarse entonces que la hipótesis cantoriana se sigue de los otros axiomas de la teoría de conjuntos. Desde 1963, en que Paul Cohen lo probó, sabemos que ése no es el caso. Pero Gödel, con seguro olfato, ya en 1947 (es decir, dieciséis años antes de que se probase) sospechaba que la hipótesis del continuo no se sigue de los otros axiomas, pues tiene consecuencias intuitivamente poco plausibles. Así pues, aunque todavía no se había probado, Gödel sospechaba la verdadera situación, es decir, que la hipótesis del continuo es independiente del resto de los axiomas de la teoría de conjuntos.

Un nominalista podría pensar que con la prueba de la independencia de la hipótesis del continuo el problema del continuo ha desaparecido. Ni la fórmula que la expresa ni su negación son deducibles en el sistema formal de la teoría axiomática de conjuntos. Punto. Pero Gödel no es nominalista, sino que piensa que los signos del formalismo conjuntista se refieren a entidades abstractas objetivas. Gödel piensa que la pregunta de si la hipótesis del continuo es verdadera o falsa tiene sentido por sí misma. Si los axiomas de la teoría de conjuntos actual dejan esta pregunta sin respuesta, ello sólo significa que esos axiomas son insuficientes y que en el futuro tendrán que ser complementados con nuevos axiomas que permitan decidir ésta y otras cuestiones abiertas de la matemática. ¿En qué podemos basarnos para buscar nuevos axiomas de la teoría de conjuntos? En dos cosas: en la intuición matemática (que corresponde a la sensación física) y en el apoyo indirecto que presta a una hipótesis (tanto en la física como en la matemática) el hecho de que se sigan de ella consecuencias verificables (por ejemplo resultados numéricos computables) difíciles de obtener sin ella y de que no se sigan de ella consecuencias indeseables. Gödel más bien sospecha que la hipótesis del continuo es falsa. Pero para estar seguro de ello necesitamos nuevos axiomas y, previamente, necesitamos aclarar nuestras ideas y profundizar en nuestras intuiciones básicas sobre lo que sea un conjunto.

En torno al problema del continuo, Gödel expone su filosofía realista (o «platónica») de la matemática con gran contundencia y claridad. Las paradojas conjuntistas no deben hacernos dudar de la realidad de los conjuntos matemáticos más de lo que las ilusiones ópticas nos hacen dudar de la realidad de los objetos físicos.

El artículo de Gödel sobre el continuo apareció en 1947 bajo el título *What is Cantor's continuum problem*? (¿Qué es el problema del continuo de Cantor?) en la revista *The American Mathematical Monthly*, núm. 54, págs. 515-525. Una versión revisada y actualizada del mismo (con el añadido de un suplemento y una posdata) aparece en Benacerraf y Putnam [1964], págs. 258-273, y ha sido tomada como base de nuestra traducción. El suplemento mismo y la posdata, sin embargo, aparecen más adelante, en la pág. 424, como Gödel [1964].

J. M.

¿QUE ES EL PROBLEMA DEL CONTINUO DE CANTOR?

1. El concepto de número cardinal

El problema del continuo de Cantor no es más que la pregunta: ¿Cuántos puntos hay en una línea recta de un espacio euclídeo? Una pregunta equivalente es: ¿Cuántos conjuntos diferentes de números naturales existen?

Por supuesto, esta pregunta sólo pudo plantearse una vez que el concepto de «número» había sido extendido a conjuntos infinitos; de aquí que pueda dudarse de si esta extensión se puede efectuar de un modo único y determinado y, por tanto, de si el planteamiento del problema en los términos simples que acabamos de usar está justificado. Un examen más atento muestra, sin embargo, que la definición de números infinitos de Cantor tiene realmente este carácter de univocidad. Pues, signifique lo que signifique «número» cuando lo apliquemos a conjuntos infinitos, queremos, sin duda, que tenga la propiedad de que el número de los objetos que pertenezcan a una cierta clase no cambie cuando, sin tocar los objetos, cambiamos de cualquier modo sus propiedades o relaciones mutuas (por ejemplo, sus colores o su distribución en el espacio). De esto, no obstante, se sigue inmediatamente que dos conjuntos (al menos dos conjuntos de objetos mutables del mundo espacio-temporal) tendrán el

mismo número cardinal si sus elementos pueden aparearse mediante una correspondencia biunívoca, que es la definición de Cantor de igualdad entre números. Pues, si existe una tal correspondencia entre dos conjuntos *A* y *B*, es posible (al menos teóricamente) cambiar las propiedades y relaciones de cada elemento de *A* por las de su correspondiente elemento de *B* de modo que *A* se transforme en un conjunto absolutamente indistinguible de *B* y, por tanto, de su mismo número cardinal. Por ejemplo, suponiendo que un cuadrado y un segmento están completamente llenos de puntos de masa (de modo que en cada uno de sus puntos esté situado exactamente un punto de masa) se sigue, gracias a que se puede demostrar que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos del cuadrado y los del segmento y, por tanto, entre los correspondientes puntos de masa, que los puntos de masa del cuadrado pueden reorganizarse de tal modo que ocupen exactamente el segmento, y viceversa. Es cierto que estas consideraciones sólo pueden aplicarse directamente a objetos físicos y que una definición del concepto de «número» que dependa del tipo de objetos que se numeren difícilmente puede considerarse satisfactoria.

De este modo apenas queda otra elección que la de aceptar la definición de Cantor de igualdad entre números, que puede extenderse fácilmente a una definición de «mayor» y «menor» para números infinitos estipulando que el número cardinal *M* de un conjunto *A* será menor que el número cardinal *N* de un conjunto *B* si *M* es diferente de *N* pero igual al número cardinal de algún subconjunto de *B*. Que un número cardinal que tenga una determinada propiedad existe significa que existe un conjunto que tiene tal número cardinal. A partir de estas definiciones es posible probar que existe una infinidad de números cardinales o «cardinalidades» infinitos y que, en especial, el número de subconjuntos de un conjunto es siempre mayor que el número de sus elementos; además las operaciones aritméticas (incluyendo sumas y productos con un número infinito de términos o factores) pueden ser extendidas (de nuevo sin ninguna arbitrariedad) a los números infinitos y pueden probarse prácticamente todas las reglas ordinarias de computación.

Pero, incluso tras esto, el problema de identificar el número cardinal de un conjunto concreto, como el continuo lineal, no

estaría bien definido si no existiese cierta representación sistemática de los números cardinales infinitos comparable con la notación decimal de los números naturales. Pero una tal representación sistemática existe, gracias al teorema que dice que para cada número cardinal y para cada conjunto de números cardinales[1] hay exactamente un número cardinal inmediatamente siguiente en magnitud y que el número cardinal de cualquier conjunto aparece en la serie obtenida de este modo[2]. Este teorema permite denotar mediante $\aleph_0$ al primer número cardinal que aparece después de los números finitos (que es la cardinalidad de los conjuntos «denumerables»), y mediante $\aleph_1$ al siguiente, etc.; mediante $\aleph_\omega$ al primero que aparece después de todos los $\aleph_i$, donde i es un número natural, el siguiente mediante $\aleph_{\omega+1}$, etc. La teoría de los números ordinales proporciona los medios para extender esta serie más y más.

2. El problema del continuo, la hipótesis del continuo y los resultados parciales acerca de su verdad obtenidos hasta el momento

De este modo el análisis de la expresión «cuántos» conduce sin ambigüedades al significado determinado de la pregunta formulada en la segunda línea de este artículo: el problema es decidir cuál de los $\aleph_\alpha$ es el número de puntos de una línea recta o (lo que es lo mismo) de cualquier otro continuo (de cualquier número de dimensiones) de un espacio euclídeo. Cantor, tras

[1] En cuanto a la cuestión de porqué no existe un conjunto de todos los números cardinales, véase la nota 15.

[2] Para la prueba de este teorema se precisa el axioma de elección (véase Fraenkel y Bar-Hillel [1958]). Pero, desde casi todos los puntos de vista posibles, se puede decir que este axioma está hoy día tan bien fundado como los otros axiomas de la teoría de conjuntos. Se ha probado que es consistente con los otros axiomas que usualmente se admiten en la teoría de conjuntos, suponiendo que éstos sean a su vez consistentes (véase Gödel [1940]). Además, es posible definir en términos de cualquier sistema de objetos que satisfagan a los otros axiomas un sistema de objetos que satisfaga a estos axiomas *y* al axioma de elección. Por último, el axioma de elección es tan evidente como los otros axiomas de la teoría de conjuntos en lo que respecta al concepto «puro» de conjunto explicado en la nota 14.

haber probado que este número es mayor que $\aleph_0$, conjeturó que es $\aleph_1$. Una idea equivalente es: cualquier subconjunto infinito del continuo tiene la cardinalidad del conjunto de los números naturales o la del continuo entero. Esta es la hipótesis del continuo de Cantor.

Pero, aunque la teoría de conjuntos de Cantor se ha desarrollado durante más de setenta años y el problema es, evidentemente, de gran importancia para ella, hasta el momento no se ha probado nada sobre la pregunta de cuál es la cardinalidad del continuo ni sobre si sus subconjuntos satisfacen o no la condición recién expuesta, excepto (1) que la cardinalidad del continuo no es un número cardinal de un tipo especial, a saber, no es un límite de una infinidad numerable de números cardinales menores[3], y (2) que la idea recién mencionada sobre los subconjuntos del continuo es verdadera para una cierta fracción infinitesimal de estos subconjuntos, los conjuntos analíticos[4, 5]. Ni siquiera podemos asignar una cota superior, por grande que sea, a la cardinalidad del continuo. Tampoco la cualidad del número cardinal del continuo nos resulta mejor conocida que su cantidad. No está decidido si este número es regular o singular, accesible o inaccesible, ni (excepto para el resultado negativo de König) cuál es su carácter de confinalidad (véase la nota 4). Sólo se conocen, además de los resultados ya mencionados, un gran número de consecuencias de la conjetura de Cantor y algunas ideas equivalentes a ella[6].

Este pronunciado fracaso resulta aún más sorprendente si el problema se considera en conexión con las cuestiones generales de aritmética cardinal. Se prueba fácilmente que la cardinalidad del continuo es igual a $2^{\aleph_0}$. De este modo el problema del continuo se convierte en una pregunta sobre la «tabla de

---

[3] Véase Hausdorff [1914], pág. 68, o Bachmann [1955], pág. 167. J. König, que descubrió este teorema, afirmó más de lo que realmente probó. (Véase König [1904], pág. 177.)

[4] Véase la lista de definiciones, en las páginas 368-370.

[5] Véase Hausdorff [1935], pág. 32. La cuestión está indecisa por el momento, incluso para los complementos de los conjuntos analíticos, y únicamente puede probarse que son finitos o tienen la cardinalidad $\aleph_0$ o $\aleph_1$ o la del continuo. (Véase Kuratowski [1933], pág. 246.)

[6] Véase Sierpinski [1934].

multiplicar» de los números cardinales, a saber, el problema de evaluar un cierto producto infinito (de hecho el más simple de los no triviales que pueden construirse). No hay, sin embargo, ningún producto infinito (de factores >1) a cuyo valor se le pueda asignar una cota superior. Todo lo que se conoce sobre la evaluación de productos infinitos son dos cotas inferiores debidas a Cantor y König (la última de las cuales implica el citado teorema negativo sobre la cardinalidad del continuo), y ciertos teoremas que conciernen a la reducción de productos con factores diferentes a exponenciaciones y de exponenciaciones a exponenciaciones con menores bases o exponentes. Estos teoremas reducen[7] todo el problema de computar productos infinitos a la evaluación de $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$ y a la realización de ciertas operaciones fundamentales con números ordinales, tales como la determinación del límite de una serie de éstos. Todos los productos y potencias pueden ser fácilmente computados[8] si se admite la «hipótesis generalizada del continuo»; es decir, si se supone que para cada α $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ o, en otras palabras, que el número de subconjuntos de un conjunto de cardinalidad $\aleph_\alpha$ es $\aleph_{\alpha+1}$. Pero, si no hacemos uso de hipótesis, ni siquiera sabemos si $m<n$ implica $2^m < 2^n$ o no (aunque es trivial que implica $2^m \leqslant 2^n$) ni si $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ o no.

3. Reformulación del problema sobre la base de un análisis de los fundamentos de la teoría de conjuntos y de los resultados obtenidos en este terreno

Esta escasez de resultados, incluso en lo que respecta a las cuestiones más fundamentales de este campo, puede deberse, hasta cierto punto, a dificultades puramente matemáticas; parece, sin embargo (véase sección 4), que aquí están involucradas razones más profundas y que únicamente se puede encontrar la solución de este problema efectuando un análisis más detallado

Esta reducción puede efectuarse gracias a los resultados y métodos de Tarski [1925].

[8] Para los números regulares $\aleph_\alpha$ se obtiene inmediatamente $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

(que el que las matemáticas acostumbra a proporcionar) de los significados de los términos que en él aparecen (tales como «conjunto», «correspondencia biunívoca», etc.) y de los axiomas que subyacen a su uso. Ya se han propuesto varios de estos análisis. Veamos qué proporcionan a nuestro problema.

En primer lugar está el intuicionismo de Brouwer, que es totalmente destructivo en sus resultados. Toda la teoría de los $\aleph$ mayores que $\aleph_1$ es rechazada como carente de significado[9]. La misma conjetura de Cantor recibe diferentes significados, todos los cuales, aunque interesantes por sí mismos, son bastante diferentes del problema original. Conducen en parte a respuestas afirmativas y en parte a negativas[10]. Sin embargo, no se ha clarificado todo suficientemente en este campo. El punto de vista «semiintuicionista», al estilo de H. Poincaré y H. Weyl[11], difícilmente preservaría mucho más de la teoría de conjuntos.

Esta actitud negativa hacia la teoría de conjuntos de Cantor y hacia la matemática clásica, de la que es una generalización natural, no es de ningún modo, sin embargo, un resultado necesario de un examen detallado de sus fundamentos, sino únicamente una consecuencia de una cierta concepción filosófica de la naturaleza de las matemáticas, que admite objetos matemáticos sólo en la medida en que sean interpretables como nuestras propias construcciones o, al menos, sean completamente dados en una intuición matemática. Para quien considere que los objetos matemáticos existen independientemente de nuestras construcciones y de que tengamos individualmente una intuición de ellos y para quien exija únicamente que los conceptos generales matemáticos sean lo suficientemente claros como para que seamos capaces de reconocer su corrección y la verdad de los axiomas que les conciernen, existe, creo, una fundamentación satisfactoria de la teoría de conjuntos de Cantor en toda su

---

9 Véase Brouwer [1908].

10 Véase Brouwer [1907], I, 9; III, 2.

11 Véase Weyl [1932]. Si el procedimiento de construcción de conjuntos ahí descrito (pág. 20) es iterado un número (transfinito) suficientemente grande de veces se llega exactamente a los números reales del modelo de teoría de conjuntos mencionado en la sección 4, en el cual la hipótesis del continuo es verdadera. Pero esta iteración no es posible dentro de los límites del punto de vista semiintuicionista.

amplitud y significado originales, a saber, la teoría axiomática de conjuntos interpretada al modo esbozado más adelante.

Podría pensarse en un primer momento que las paradojas de la teoría de conjuntos condenarían a una empresa de este tipo al fracaso, pero un examen más detenido muestra que no producen ninguna dificultad. A pesar de todo constituyen un problema muy serio, pero no para la matemática, sino más bien para la lógica y la epistemología. En la medida en que los conjuntos aparecen en matemáticas (al menos en las matemáticas de hoy, incluyendo toda la teoría de los conjuntos de Cantor), son conjuntos de números enteros o de números racionales (es decir, de pares de enteros) o de números reales (es decir, de conjuntos de números racionales) o de funciones de números reales (es decir, de conjuntos de pares de números reales), etc. Cuando se afirman teoremas sobre todos los conjuntos (o la existencia de conjuntos en general) puede interpretarse sin ninguna dificultad que se quiere decir que valen para conjuntos de números enteros, así como para conjuntos de conjuntos de números enteros, etc. (respectivamente, que existen conjuntos de números enteros, o ..., etc., que tienen la propiedad enunciada). Sin embargo, este concepto de conjunto[12] según el cual un conjunto es algo obtenible a partir de los números enteros (o cualesquiera otros objetos bien definidos) mediante la aplicación iterada[13] de la operación «conjunto de»[14], y no algo

---

[12] Debe admitirse que el espíritu de las modernas disciplinas abstractas matemáticas, en especial de la teoría de las categorías, trasciende este concepto de conjunto, como es patente, por ejemplo, en la autoaplicabilidad de las categorías. (Véase MacLane [1959].) No parece, sin embargo, que se pierde nada del contenido matemático de la teoría si se distinguen categorías de diferentes niveles. Si existiesen pruebas matemáticamente interesantes que no pudiesen llevarse a cabo bajo esta interpretación, entonces las paradojas de la teoría de conjuntos se convertirían en un serio problema para las matemáticas.

[13] Aquí se quiere dar a entender que se incluye la iteración transfinita; es decir, se considera a la totalidad de los conjuntos obtenidos mediante iteración finita como un nuevo conjunto y base para posteriores aplicaciones de la operación «conjunto de».

[14] La operación «conjunto de los *x*» (donde la variable «*x*» toma valores sobre cierto tipo dado de objetos) no puede definirse de un modo satisfactorio (al menos no en el presente estado de conocimientos), pero puede ser parafraseada mediante otras expresiones que contengan de nuevo al concepto de conjunto, tales como «multitud de los *x*», «combinación de cualquier número de *x*», «parte

obtenible dividiendo la totalidad de las cosas que existen en dos categorías, no ha conducido nunca a antinomias de ningún tipo; esto es, el trabajo perfectamente «ingenuo» y acrítico con este concepto de conjunto ha resultado ser hasta el momento completamente autoconsistente[15].

Pero, además, los axiomas que subyacen al uso irrestricto de este concepto de conjunto o, al menos, un subconjunto de éstos, que bastan para todas las pruebas matemáticas inventadas hasta ahora (excepto para los teoremas que versan sobre la existencia de números cardinales extremadamente grandes; véase la nota 20) han sido formulados de un modo tan preciso en la teoría axiomática de conjuntos[16] que la pregunta de si cierta sentencia dada se sigue de ellos o no puede transformarse, gracias a la lógica matemática, en un problema puramente combinatorio relativo a la manipulación de signos al que tiene que reconocer sentido incluso el intuicionista más radical. De este modo el problema del continuo de Cantor, independientemente del punto de vista filosófico que se adopte, tiene sin ninguna duda al menos el siguiente sentido: el de averiguar si a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos, formulados tal y como aparecen en los sistemas citados, se puede deducir una respuesta y, si así fuese, cuál.

Desde luego, si se interpreta de este modo (suponiendo la consistencia de los axiomas) hay *a priori* tres posibilidades para la conjetura de Cantor; puede ser demostrable, refutable o indecidible[17]. La tercera alternativa (que es únicamente una

---

de la totalidad de los x», donde «multitud» («combinación», «parte») se concibe como algo que existe por sí mismo sin que importe que podamos o no definirlo con un número finito de palabras (de modo que no se excluyen conjuntos aleatorios).

[15] Se sigue inmediatamente de esta explicación del término «conjunto» que no puede existir un conjunto de todos los conjuntos u otros conjuntos de similar extensión, pues cada conjunto obtenido da lugar inmediatamente a nuevas aplicaciones de la operación «conjunto de» y, por tanto, a la existencia de nuevos conjuntos.

[16] Véase, por ejemplo, Bernays [1937-43]; v. Neumann [1925]; v. Neumann [1929], v. Neumann [1928], Gödel [1940] y Bernays y Fraenkel [1958]. Recientemente se ha hecho posible efectuar axiomatizaciones mucho más elegantes mediante la inclusión de axiomas de infinitud mucho más fuertes. (Véase Bernays [1961].)

[17] En el caso de que los axiomas fuesen contradictorios se daría la última de

formulación precisa de la anterior conjetura de que las dificultades del problema quizá no sean puramente matemáticas) es la más probable. Quizá hoy día el modo más prometedor de abordar el problema sea buscar una prueba de ello. Ya se ha obtenido un resultado en este sentido, a saber, que la conjetura de Cantor no es refutable a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos en el supuesto de que dichos axiomas sean consistentes (véase sección 4).

Debe observarse, no obstante, que, desde el punto de vista aquí adoptado, una prueba de la indecidibilidad de la conjetura de Cantor a partir de los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos (en oposición, por ejemplo, a la prueba de la trascendencia de π) de ningún modo resolvería el problema. Pues si se acepta que el significado de los signos primitivos de la teoría de conjuntos como se explica en la página 360 y en la nota 15 es correcto, entonces los conceptos y teoremas de la teoría de conjuntos describirían alguna realidad bien determinada en la cual la conjetura de Cantor debería ser cierta o falsa.

Por ello su indecidibilidad a partir de los axiomas que hoy día aceptamos sólo puede significar que estos axiomas no entrañan una descripción completa de esta realidad. Esta creencia no es, de ningún modo, quimérica, pues es posible establecer medios para obtener la decisión de una pregunta que es indecidible a partir de los axiomas usuales.

En primer lugar, los axiomas de la teoría de conjuntos no constituyen en modo alguno un sistema cerrado en sí mismo, sino que, al contrario, el verdadero concepto de conjunto[18] en que están fundados sugiere su extensión mediante nuevos axiomas que afirman la existencia de aún más posteriores iteraciones de la operación «conjunto de». Estos axiomas también pueden

las cuatro alternativas *a priori*, a saber, sería a la vez demostrable y refutable a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos.

[18] De modo similar el concepto «propiedad de conjunto» (el segundo de los términos primitivos de la teoría de conjuntos) sugiere continuas extensiones de los axiomas en relación con él. Además se pueden introducir conceptos como «propiedad de propiedad de conjunto», etc. Sin embargo, tanto los nuevos axiomas así obtenidos como sus consecuencias referidas a dominios limitados de conjuntos (tales como la hipótesis del continuo) están ya contenidas (en la medida en que hoy son conocidas) en los axiomas sobre conjuntos.

formularse como sentencias que afirman la existencia de números cardinales muy grandes (es decir, de conjuntos que tienen estos números cardinales). El más simple de estos fuertes «axiomas de infinitud» afirma la existencia de números inaccesibles (en el sentido más débil o más fuerte) mayores que $\aleph_0$. El último axioma, simplificando, únicamente dice que la totalidad de los conjuntos obtenibles mediante el uso de los procedimientos de formación de conjuntos expresados en los otros axiomas es de nuevo un conjunto (y, por tanto, una nueva base para posteriores aplicaciones de estos procedimientos)[19]. P. Mahlo formuló antes otros axiomas de infinitud[20]. Estos axiomas muestran con claridad no sólo que el sistema axiomático de teoría de conjuntos tal y como hoy día se usa es incompleto, sino también que puede ser complementado sin arbitrariedad mediante nuevos axiomas que únicamente despliegan el contenido del concepto de conjunto antes explicado.

Se puede probar que estos axiomas también tienen consecuencias en campos muy alejados del tema de los números transfinitos muy grandes, que es el asunto que de un modo inmediato les concierne: se puede probar que cada uno de ellos, en el supuesto de que sea consistente, aumenta el número de sentencias decidibles incluso en el terreno de las ecuaciones diofánticas. En lo que respecta al problema del continuo, hay poca esperanza de resolverlo mediante estos axiomas de infinitud que pueden establecerse a partir de los principios de Mahlo (la mencionada prueba de la irrefutabilidad de la hipótesis del

---

[19] Véase Zermelo [1930].

[20] Véase Mahlo [1911] y Mahlo [1913]. Sin embargo, a partir de la presentación del tema de Mahlo no parece que los números que define realmente existan. En los últimos años se han hecho considerables progresos en lo que respecta a los axiomas de infinitud. En particular se han formulado algunos axiomas que están basados en principios totalmente diferentes a los de Mahlo, y Dana Scott ha probado que uno de ellos implica la negación de la sentencia *A* (mencionada en la pág. 366). Si se añade entonces este axioma, la prueba de consistencia de la hipótesis del continuo explicada en la pág. 366 *ya no* funciona. Sin embargo, aún no se ha aclarado que estos axiomas estén implicados por el concepto general de conjunto en el sentido en que lo están los de Mahlo. Véase Tarski [1960], Scott [1961] y Hanf y Scott [1961]. Azriel Levy ha deducido los axiomas de Mahlo a partir de un principio general sobre el sistema de todos los conjuntos. Véase Levy [1960]. Véase también Bernays [1961], donde se deducen casi todos los axiomas de la teoría de conjuntos a partir del principio de Levy.

continuo no experimenta ningún cambio por la adición de estos axiomas). Pero existen otros axiomas fundados en otros principios (véase la nota 20); podrían también existir, además de los axiomas usuales, de los axiomas de infinitud y de los axiomas mencionados de la nota 18, otros axiomas de la teoría de conjuntos (hasta el momento desconocidos) que podríamos reconocer como implicados por los conceptos subyacentes a la lógica y a las matemáticas si tuviéramos una comprensión más profunda de estos conceptos. (Véase, por ejemplo, la nota 23.)

Tenemos, sin embargo, y en segundo lugar, que, incluso prescindiendo de la necesidad intrínseca de algún nuevo axioma y hasta en el caso de que no hubiese una tal necesidad, es posible una decisión probable sobre su verdad también de otro modo, a saber, estudiando su «éxito» inductivamente. Exito significa aquí fecundidad en consecuencias, en especial en consecuencias «verificables», es decir, en consecuencias demostrables sin el nuevo axioma, pero cuyas pruebas resulten mucho más fáciles de descubrir y desarrollar con ayuda del nuevo axioma, que además hace posible resumir muchas pruebas diferentes en una sola. Los axiomas para el sistema de los números reales, rechazados por los intuicionistas, se han verificado hasta cierto punto en este sentido gracias al hecho de que la teoría analítica de números permite frecuentemente probar teoremas numéricos que pueden ser posteriormente verificados, de un modo más farragoso, mediante métodos elementales. Sin embargo, es concebible un grado de verificación mucho mayor que éste. Pueden existir axiomas tan abundantes en sus consecuencias verificables que proporcionen tanta luz a un amplio campo y que ofrezcan métodos tan poderosos para resolver problemas (e incluso, en la medida de lo posible, para resolverlo constructivamente) que, sin que importe que sean o no intrínsecamente necesarios, deberían ser aceptados en el mismo sentido en que lo es cualquier teoría física bien establecida.

4. Algunas observaciones sobre la cuestión: ¿En qué sentido y por qué camino podemos esperar encontrar una solución del problema del continuo?

Pero ¿son estas consideraciones apropiadas para el problema del continuo? ¿Hay realmente alguna indicación clara de que no sea solucionable a partir de los axiomas aceptados? Pienso que hay por lo menos dos:

La primera resulta del hecho de que hay dos clases de objetos definidos de modos bastante diferentes que satisfacen todos los axiomas de la teoría de conjuntos que se han establecido hasta el momento. Una clase consiste en los conjuntos definibles de un cierto modo mediante las propiedades de sus elementos[21]; la otra consiste en los conjuntos en el sentido de multitudes arbitrarias, sin que importe si pueden ser definidos o de qué modo. Ahora bien, antes de que se haya establecido qué objetos han de ser numerados, y sobre la base de qué correspondencias biunívocas, difícilmente podemos esperar ser capaces de determinar su número, a no ser por alguna afortunada coincidencia. No obstante, si uno cree que no tiene sentido hablar de conjuntos excepto como extensiones de propiedades definibles, entonces tampoco puede esperar que más que una pequeña fracción de los problemas de la teoría de conjuntos puedan resolverse sin hacer uso de esta característica, esencial en su opinión, de los conjuntos, a saber, que son extensiones de propiedades definibles. Sin embargo, esta característica de los conjuntos ni está contenida de modo implícito en los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos ni formulada explícitamente en ellos. Entonces, y desde cualquier punto de vista, si se tiene en cuenta lo que se dijo en la sección 2, se puede establecer la conjetura de que el problema del continuo no puede resolverse con los axiomas establecidos hasta el momento, pero, por otro

[21] A saber, definibles mediante ciertos procedimientos «*en términos de* números ordinales» (es decir, y simplificando, bajo el supuesto de que para cada número ordinal exista un signo que lo denote). Véase Gödel [1940] y Gödel [1939]. La paradoja de Richard, naturalmente, no se aplica a este tipo de definibilidad, pues la totalidad de los ordinales no es, claro está, numerable.

lado, puede tener solución con la ayuda de algún nuevo axioma que afirme o implique algo sobre la definibilidad de los conjuntos[22].

La última parte de la conjetura ya ha sido verificada; a saber, el concepto de definibilidad mencionado en la nota 21 (que es a su vez definible en la teoría axiomática de conjuntos) permite deducir, en la teoría axiomática de conjuntos, la hipótesis generalizada del continuo a partir del axioma que dice que todo conjunto es definible en este sentido[23]. Como se puede probar que el axioma (llamémosle «*A*») es consistente con los otros axiomas, bajo el supuesto de que estos otros axiomas sean a su vez consistentes, este resultado (independientemente de la posición filosófica que se tome respecto a la definibilidad) muestra la consistencia de la hipótesis del continuo con los otros axiomas de la teoría de conjuntos, supuesto que estos axiomas sean consistentes[24]. En su estructura, la prueba es similar a la de la prueba de consistencia de la geometría no euclídea por medio de un modelo interno de la geometría euclídea. A saber, de los axiomas de la teoría de conjuntos se sigue que los conjuntos definibles en el sentido mencionado forman un modelo de teoría de conjuntos en el que la idea *A* y, por tanto, la hipótesis generalizada del continuo son verdaderas.

Un segundo argumento a favor de que el problema del continuo no es solucionable en base a los axiomas usuales puede fundarse en ciertos hechos (desconocidos en la época de Cantor) que parecen indicar que la conjetura de Cantor acabará siendo

---

[22] El programa de Hilbert para solucionar el problema del continuo (véase Hilbert [1925]) que, sin embargo, no ha sido llevado a cabo, también estaba basado en una consideración de todas las posibles definiciones de los números reales.

[23] Por otro lado, quizá se podría deducir la negación de la conjetura de Cantor a partir de un axioma en cierto modo opuesto a éste. Estoy pensando en un axioma que (al estilo del axioma de completud de Hilbert para la geometría) estableciese alguna propiedad máxima del sistema de todos los conjuntos del modo como *A* establece una propiedad mínima. Obsérvese que parece que sólo una propiedad máxima armonizaría con el concepto de conjunto explicado en la nota 14.

[24] Véase Gödel [1940] y Gödel [1939]. Para llevar a cabo la prueba en todos sus detalles debe consultarse Gödel [1940].

errónea[25], aunque, por otro lado, es demostrablemente imposible refutarla a partir de los axiomas que hoy se aceptan.

Uno de tales hechos es que se ha logrado probar que existen conjuntos innumerables de puntos que tienen ciertas propiedades (que afirman su extrema rareza), pero no hay modo de ver cómo se podría esperar probar la existencia de ejemplos de la cardinalidad del continuo. Propiedades de este tipo (de subconjuntos de una línea recta) son: (1) ser de la primera categoría en cualquier conjunto perfecto[26]; (2) ser trasladado a un conjunto-cero por cada biyección continua de la recta en sí misma[27]. Otra propiedad de naturaleza similar es la de ser cubrible por infinitos intervalos de cualesquiera longitudes dadas. Pero en este caso ni siquiera se ha logrado probar la existencia de ejemplos innumerables. En los tres casos, sin embargo, se sigue de la hipótesis del continuo no sólo que existen ejemplos de la cardinalidad del continuo[28], sino incluso tales que son trasladados en sí mismos (con la posible excepción de una infinidad numerable de puntos) por *cada* traslación de la línea recta[29].

Otras consecuencias muy poco plausibles de la hipótesis del continuo son: (1) que existen subconjuntos de una línea recta de la cardinalidad del continuo que son cubribles (con la posible excepción de una infinidad numerable de puntos) por *cada* conjunto denso de intervalos[30]; (2) que existen infinitos subconjuntos dimensionales del espacio de Hilbert que no contienen ningún subconjunto innumerable finito-dimensional (en el sentido de Menger-Urysohn)[31]; (3) que existe una secuencia infinita A^i de descomposiciones de cualquier conjunto M de la cardinalidad del continuo en un número igual a la cardinalidad del continuo de conjuntos A^i_x mutuamente exclusivos tales que de cualquier modo que se escoja un conjunto $A^i_{x_i}$ para cada i, $\prod_{i=0}^{\infty}$

[25] N. Lusin también ha expresado puntos de vista que tienden a esta dirección. Véase Lusin [1935]. Véase también Sierpinski [1935].

[26] Véase Sierpinski [1934a] y Kuratowski [1933], pág. 269.

[27] Véase Lusin y Sierpinski [1918], y Sierpinski [1934a].

[28] Para el tercer caso, véase Sierpinski [1934], pág. 39, Teorema 1.

[29] Véase Sierpinski [1935a].

[30] Véase Lusin [1914].

[31] Véase Hurewicz [1932].

$(M - A^i_{x_i})$ es denumerable[32]. (1) y (3) son muy inverosímiles, incluso si «la cardinalidad del continuo» se reemplaza por «$\aleph_1$».

Se puede objetar que muchos de los resultados de la teoría de conjuntos de puntos obtenidos sin usar la hipótesis del continuo son también muy inesperados e inverosímiles[33]. Pero, aunque esto sea verdad, la situación allí es diferente, pues en muchos de estos casos (tales como, por ejemplo, las curvas de Peano) la apariencia extraña puede ser explicada por una falta de concordancia entre nuestros conceptos geométricos intuitivos y los conceptos de la teoría de conjuntos que aparecen en los teoremas. También es muy sospechoso que, en oposición a las numerosas ideas verosímiles que implican la negación de la hipótesis del continuo, no se conozca ninguna idea verosímil que implique la hipótesis del continuo. Creo que, resumiendo todo lo dicho, hay buenas razones para sospechar que el papel del problema del continuo en la teoría de conjuntos consistirá en conducir al descubrimiento de nuevos axiomas que permitan refutar la conjetura de Cantor.

Definiciones de algunos de los términos técnicos

Las definiciones 4-15 se refieren a subconjuntos de una línea recta, pero pueden transferirse literalmente a subconjuntos de espacios euclídeos de cualquier número de dimensiones si se identifica «intervalo» con «interior de un paralepípedo».

1. Llamo el *carácter de confinalidad* de un número cardinal m (abreviado «$cf(m)$») al mínimo número n tal que m es la suma de n números $< m$.

2. Un número cardinal m es *regular* si $cf(m) = m$ y en otro caso es singular.

3. Un cardinal infinito m es *inaccesible* si es regular y no tiene ningún predecesor inmediato (es decir, si, aunque sea un límite de números $< m$, no es un límite de menos de m de tales números); es *fuertemente inaccesible* si cada producto (y por

[32] Véase Braun y Sierpinski [1932], 1, sentencia (*Q*). Esta sentencia es equivalente a la hipótesis del continuo.

[33] Véase, por ejemplo, Blumenthal [1940].

tanto también cada suma) de menos de m números $<m$ es $<m$. (Véase Sierpinski y Tarski [1930] y Tarski [1938].)

De la hipótesis generalizada del continuo se sigue que estos dos conceptos son equivalentes. $\aleph_0$ es, evidentemente, inaccesible y también es fuertemente inaccesible. En cuanto a los números finitos, 0 y 2 son fuertemente inaccesibles y ningún otro lo es. Una definición de inaccesibilidad aplicable a números finitos es ésta: m es inaccesible si (1) cualquier suma de menos de m números $<m$ es $<m$, y (2) el número de números $<m$ es m. Esta definición concuerda con la anterior en cuanto a números transfinitos y respecto a los números finitos determina a 0, 1 y 2 como inaccesibles. De este modo la inaccesibilidad y la inaccesibilidad fuerte resultan no ser equivalentes en el caso de números finitos. Esto introduce una cierta duda sobre su equivalencia en el caso de los números transfinitos, que se sigue de la hipótesis generalizada del continuo.

4. Un conjunto de intervalos es *denso* si cualquier intervalo tiene puntos en común con algún intervalo del conjunto (los puntos extremos de un intervalo no son considerados como puntos del intervalo).

5. Un *conjunto-cero* es un conjunto que puede ser cubierto por infinitos conjuntos de intervalos de suma de longitudes arbitrariamente pequeña.

6. Un *entorno* de un punto P es un intervalo que contiene a P.

7. Un subconjunto A de B es *denso en* B si cada entorno de cualquier punto de B contiene puntos de A.

8. Un punto P está en el *exterior* de A si tiene un entorno que no contiene ningún punto de A.

9. Un subconjunto A de B *no es denso en ningún punto de* B si los puntos de B que están en el exterior de A son densos en B o (lo que es equivalente) si no hay ningún intervalo I tal que la intersección $I \cap A$ sea densa en $I \cap B$.

10. Un subconjunto A de B es *de la primera categoría en* B si es la unión de una infinidad numerable de conjuntos no densos en ningún punto de B.

11. Un conjunto A es *de la primera categoría sobre B* si la intersección $A \cap B$ es de la primera categoría en B.

12. Un punto P se llama un *punto límite* de un conjunto A si cualquier entorno de P contiene infinitos puntos de A.

13. Un conjunto A se llama *cerrado* cuando contiene a todos sus puntos límite.

14. Un conjunto es *perfecto* si es cerrado y no tiene ningún punto aislado (es decir, si ninguno de sus puntos tiene un entorno que no contenga a otro punto del conjunto).

15. Los *conjuntos de Borel* se definen como el menor sistema de conjuntos que satisfaga los siguientes postulados:

(1) Los conjuntos cerrados son conjuntos de Borel.
(2) El complemento de un conjunto de Borel es un conjunto de Borel.
(3) La unión de una infinidad numerable de conjuntos de Borel es un conjunto de Borel.

16. Un conjunto es *analítico* si es la proyección ortogonal de algún conjunto de Borel de un espacio de dimensión inmediatamente superior. (Por supuesto, cada conjunto de Borel es analítico.)

Introducción a:
Un ejemplo de un nuevo tipo de soluciones cosmológicas de las ecuaciones einsteinianas del campo gravitatorio

Gödel pasó los años cuarenta en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, donde seguiría hasta su muerte. En ese Instituto tenía como colegas a los más ilustres cosmólogos de su tiempo –a Albert Einstein, a Hermann Weyl, a H. P. Robertson, etc.–. No es de extrañar, por tanto, si el interés por la cosmología se le contagió. Ahora bien, la cosmología del siglo XX se basa en la teoría general de la relatividad, centrada en torno a las ecuaciones einsteinianas del campo gravitatorio. Estas ecuaciones no determinan unívocamente la estructura del universo, sino que admiten diversas soluciones, que corresponden a otros tantos universos posibles.

En 1949 Gödel descubrió una solución de las ecuaciones einsteinianas del campo gravitatorio que determina un espacio-tiempo que no cumple con el principio cosmológico, pues si bien es homogéneo, no es isótropo (igual en todas las direcciones para cualquier observador), ya que está sometido a una rotación de la materia respecto a la brújula de referencia de la inercia. Este universo gödeliano es homogéneo, infinito, está provisto de curvatura constante y es estacionario; en particular, por tanto, no admite expansión ni da cuenta del desplazamiento hacia el rojo del espectro de la luz que nos llega de los objetos más lejanos. Por tanto, este universo gödeliano no es el universo real en que vivimos, sino sólo un universo posible, en el sentido de

compatible con las leyes de la naturaleza expresadas en las ecuaciones einsteinianas del campo gravitatorio.

Cada punto del espacio-tiempo cuatridimensional se llama un suceso. Cada dos sucesos están unidos por un intervalo (cuyo cuadrado es igual al cuadrado de la diferencia de sus coordenadas temporales menos el cuadrado de sus coordenadas espaciales). Si el cuadrado del intervalo entre los sucesos A y B es positivo, decimos que se trata de un intervalo de tipo temporal. Una línea de universo es una trayectoria posible en el espacio-tiempo 4-dimensional, es decir, una sucesión continua de sucesos unidos por intervalos de tipo temporal. En los modelos determinados por soluciones con densidad media de materia $\neq 0$ conocidos hasta entonces, las líneas de universo nunca son cerradas, es decir, si A y B están en la misma línea de universo y A precede a B, no hay ninguna línea de universo en la que B precede a A. En el modelo determinado por la solución de Gödel a las ecuaciones del campo gravitatorio, sin embargo, a pesar de que la densidad media de la materia es distinta de 0, son posibles líneas de universo de tipo temporal tales que en una de ellas el suceso A es anterior a B (pertenece al pasado de B), mientras que en otra A es posterior a B (pertenece al futuro de B), es decir, hay líneas cerradas de tiempo, lo que priva al tiempo de todo carácter absoluto.

Las consecuencias filosóficas de la construcción de este extraño modelo de la relatividad general serían expuestas por Gödel en ese mismo año en su contribución al volumen *Albert Einstein, Philosopher-Scientist* (véase pág.378 de este libro).

La solución encontrada por Gödel a las ecuaciones einsteinianas del campo gravitatorio y la demostración de ciertas propiedades del modelo de universo determinado por ella apareció en 1949 bajo el título *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation* (Un ejemplo de un nuevo tipo de soluciones cosmológicas de las ecuaciones einsteinianas del campo gravitatorio) en la revista *Reviews of modern physics*, vol. 21, núm. 3, págs. 447-450.

J. M.

UN EJEMPLO DE UN NUEVO TIPO DE SOLUCIONES COSMOLOGICAS DE LAS ECUACIONES EINSTEINIANAS DEL CAMPO GRAVITATORIO

1. Las principales propiedades de la nueva solución

Todas las soluciones cosmológicas con densidad no-nula de la materia conocidas hasta el presente[1] poseen la propiedad común de que, en cierto sentido, contienen una coordenada temporal «absoluta»[2], debido al hecho de que existe un sistema uniparamétrico de triespacios que son en todos los puntos ortogonales a las líneas-universo de la materia. Es fácil ver que la inexistencia de un sistema tal de triespacios es equivalente a una rotación de la materia relativamente a la brújula de la inercia. En este artículo propongo una solución (con un término cosmológico $\neq 0$) que presenta tal rotación. Esta solución, o más bien el espacio tetradimensional S que ella define, posee además las siguientes propiedades:

(1) S es homogéneo, es decir, para dos puntos cualesquiera P, Q de S existe una transformación de S sobre sí mismo que

---

[1] Véase, por ejemplo, H. P. Robertson, *Rev. Mod. Phys.*, 5, 62 (1933).

[2] Por lo que respecta a las consecuencias filosóficas que se han sacado de esta circunstancia, véase J. Jeans, «Man and the Universe», *Halley Stewart Lecture* (1935), y mi artículo de próxima aparición en el volumen dedicado a Einstein de la *Library of Living Philosophers*.

aplica P en Q. En términos físicos, esto significa que la solución es estacionaria y espacialmente homogénea.

(2) Existe un grupo uniparamétrico de transformaciones de S sobre sí mismo que aplica cada línea-universo de materia en sí misma de modo que dos líneas-universo cualesquiera de materia son equidistantes.

(3) S tiene simetría rotacional, es decir, para cada punto P de S existe un grupo uniparamétrico de transformaciones de S sobre sí mismo que aplica P en sí mismo.

(4) La totalidad de los vectores tipo tiempo y nulos puede dividirse de tal modo en vectores-$+$ y vectores-$-$ que: (a) si ξ es un vector-$+$, $-\xi$ es un vector-$-$; (b) un límite de vectores-$+$ (o $-$), si $\neq 0$, es a su vez un vector-$+$ (o $-$). Esto es, en toda la solución se puede introducir consistentemente una dirección positiva del tiempo.

Después de haber introducido de este modo una dirección del tiempo, se define una orientación temporal para la línea-universo de cada partícula (real o posible) de materia o luz, es decir, para dos puntos cualesquiera dentro de un entorno está determinado cuál es anterior a cuál. Por otra parte, no obstante, no existe ninguna ordenación temporal de *todos* los sucesos puntuales que concuerde en dirección con todas esas ordenaciones individuales. Esto se expresa en la siguiente propiedad:

(5) No es posible asignar una coordenada temporal t a cada punto del espacio-tiempo de tal modo que t crezca siempre si nos movemos en una dirección tipo tiempo positiva; y esto es válido tanto para una coordenada temporal abierta como para una cerrada.

(6) Cada línea-universo de materia que se da en la solución es una línea abierta de longitud infinita que nunca se vuelve a aproximar a ninguno de sus puntos precedentes; pero también existen líneas tipo-tiempo cerradas[3]. En particular, si P y Q son

---

[3] Si la tangente de una línea es discontinua, se considerará que la línea es tipo tiempo sólo en el caso en que las esquinas que presente se puedan redondear de tal modo que la línea resultante sea tipo tiempo en todos los puntos.

dos puntos cualesquiera de una línea-universo de materia[4] y P precede a Q sobre esta línea, existe una línea tipo tiempo que conecta P y Q y sobre la cual Q precede a P; es decir, en estos universos es teóricamente posible viajar al pasado o influirlo de algún modo.

(7) No existen triespacios que sean tipo espacio en todos los puntos y que intersecten cada línea-universo de materia en un punto.

(8) Si Σ es cualquier sistema de triespacios mutuamente excluyentes, cada uno de los cuales intersecta cada línea-universo de materia en un punto[5], entonces existe una transformación que aplica S y la dirección positiva del tiempo en sí mismos, pero que *no* aplica Σ en sí mismo; es decir, no existe un tiempo *absoluto*, aun cuando no se requiera que concuerde en dirección con los tiempos de todos los observadores posibles (donde «absoluto» significa: definible sin referencia a objetos individuales, como, por ejemplo, un sistema galáctico particular).

(9) La materia tiene en todos los puntos una rotación relativa a la brújula de la inercia con la velocidad angular: $2(\pi\kappa\rho)^{1/2}$, donde ρ es la densidad media de la materia y κ es la constante de la gravitación de Newton.

2. Definición del elemento lineal y prueba de que satisface las ecuaciones de campo

El elemento lineal de S se define mediante la siguiente expresión[6]:

$$a^2(dx_0^2 - dx_1^2 + (e^{2x_1}/2)\, dx_2^2 - dx_3^2 + 2e^{x_1} dx_0\, dx_2),$$

[4] «Línea-universo de materia» sin ulterior especificación se referirá siempre a las líneas-universo de materia que aparecen como tales en la solución que consideramos.

[5] Otra hipótesis sobre Σ bajo la cual se verifica esta conclusión es la de que Σ sea uniparamétrico y orientado (donde la orientación se refiere al espacio cuyos puntos son los elementos de Σ).

[6] Esta forma cuadrática también se puede escribir así:

$$a^2\left((dx_0 + e^{x_1} dx_2)^2 - dx_1^2 - \frac{e^{2x_1}}{2} dx_2^2 - dx_3^2\right),$$

donde a es un número positivo. Las matrices de g_{ik} y g^{ik}, por lo tanto, son las dos siguientes:

$$a^2 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & e^{x1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^{x1} & 0 & \frac{e^{2x1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \frac{1}{a^2} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 2e^{-x1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2e^{-x1} & 0 & -2e^{-2x1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Debido al hecho de que sólo dos de las cuarenta $\partial g_{ik}/\partial x_l$ son $\neq 0$, a saber, $\partial g_{22}/\partial x_1$ y $\partial g_{02}/\partial x_1$, las $\Gamma_{i,kl}$ y $\Gamma_{kl}^{\ i}$ se pueden calcular muy fácilmente. Se obtienen los valores:

$$\Gamma_{0,12} = -\Gamma_{1,02} = \Gamma_{2,01} = (a^2/2)e^{x1},$$
$$\Gamma_{1,22} = -\Gamma_{2,12} = -(a^2/2)e^{2x1},$$
$$\Gamma^{0}_{01} = 1,\ \Gamma^{0}_{12} = \Gamma^{1}_{02} = e^{x1}/2,$$
$$\Gamma^{1}_{22} = e^{2x1}/2,\ \Gamma^{2}_{01} = -e^{-x1}$$

Estas $\Gamma_{i,kl}$ y Γ^{i}_{kl}, así como las obtenidas a partir de ellas al permutar los dos últimos índices (o los dos inferiores), son las únicas que no se anulan.

Si usamos para R_{ik} la fórmula[7]:

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\ ik} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log g}{\partial x_i\ \partial x_k} + \frac{1}{2}\Gamma^{\sigma}_{\ ik}\frac{\partial \log g}{\partial x_\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\sigma i}\ \Gamma^{\sigma}_{\rho k},$$

---

lo cual hace evidente que, tal como se requiere, su signatura es -2 en todos los puntos. El triespacio que se obtiene al prescindir del término $-dx_3^2$ tiene un significado geométrico simple (véase más abajo). Esencialmente el mismo triespacio, pero con la signatura $+3$ y con valores más generales para las constantes, ha sido investigado en relación con la teoría de los grupos continuos, sin ninguna referencia a la teoría de la relatividad. Véase, por ejemplo, L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni* (Pisa, 1918), pág. 565.

[7] Nótese que los físicos frecuentemente designan por $-R_{ik}$ lo que aquí se designa por R_{ik}, con el cambio de signo correspondiente en las ecuaciones de campo.

y tenemos en cuenta que $\partial/\partial x_i$ se anula para cada magnitud de la solución, excepto para $i=1$, y que $g=(a^8/2)e^{2x_1}$, obtenemos:

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma^1_{ik} + \Gamma^1_{ik} - \Gamma^\sigma_{\rho i} \Gamma^\rho_{\sigma k}.$$

De aquí resultan los valores para R_{ik}:

$$R_{00}=1, \; R_{22}=e^{2x_1}, \; R_{02}=R_{20}=e^{x_1};$$

todas las demás R_{ik} se anulan. De ahí que

$$R=1/a^2.$$

El vector unidad u en la dirección de las líneas-x_0 tiene los componentes contravariantes 1/a, 0, 0, 0, y, por lo tanto, los componentes covariantes a, 0, ae^{x_1}, 0.

Por tanto, obtenemos:

$$R_{ik}=1/a^2 \cdot u_i u_k.$$

Dado que, además, R es una constante, las ecuaciones de campo relativistas (con las líneas-x_0 como líneas-universo de materia), es decir, las ecuaciones[8]:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 8\pi\kappa\rho u_i u_k + \lambda g_{ik}$$

se satisfacen (para un valor dado de ρ) si ponemos

$$1/a^2 = 8\pi\kappa\rho, \; \lambda = -R/2 = -1/2a^2 = -4\pi\kappa\rho.$$

El signo de la constante cosmológica es aquí opuesto al que aparece en la solución estática de Einstein y corresponde a una presión positiva.

[8] Se supone que el elemento lineal da las distancias tipo tiempo en segundos y las distancias tipo espacio en segundos-luz. En consecuencia, el coeficiente de $u_i u_k$ difiere del usual sólo por un factor c^2.

3. Pruebas de las propiedades enumeradas

La afirmación de que no existe un sistema uniparamétrico de triespacios ortogonal a las líneas-x_0 se sigue inmediatamente de la condición necesaria y suficiente que debe satisfacer cualquier espacio vectorial v en un tetraespacio si se quiere que exista un sistema de triespacios en todos los puntos ortogonal a los vectores del espacio. Esta condición implica que el tensor simétrico oblicuo.

$$a_{ikl} = v_i\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right) + v_k\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right) + v_l\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

se anule idénticamente. Sin embargo, los componentes del vector correspondiente:

$$w^j = \frac{\varepsilon^{jikl}}{6 \cdot \sqrt{g}} a_{ikl},$$

en nuestro caso (es decir, para $v_i = u_i$) tienen los valores 0, 0, 0, $\sqrt{2}/a^2$. El hecho de que w^3 no se anule muestra, además, que no existen superficies ortogonales a las líneas-x_0 en los subespacios para los que $x_3 = \text{const}$.

Si v es el vector unidad que representa la velocidad de la materia, el vector w (el cual evidentemente siempre es ortogonal a v) es el doble de la velocidad angular de la materia en un sistema inercial local en cuyo origen la materia se halla en reposo en el momento considerado[9]. De ahí se obtiene en seguida la propiedad (9).

Las propiedades (1) y (2) se siguen del hecho directamente verificable de que el espacio S admite los cuatro sistemas siguientes de transformaciones en sí mismo:

(I) $x_0 = x_0' + b$

$x_i = x_i'$ para $i \neq 0$

[9] Esto es una consecuencia inmediata de la definición de un sistema inercial local, la cual estipula que $g_{ik} = \pm\delta_k^i$ y que $\partial g_{ik}/\partial x_l = 0$ para cada i, k, l.

(II) $x_2 = x'_2 + b$
$x_i = x'_i$ para $i \neq 2$

(III) $x_3 = x'_3 + b$
$x_i = x'_i$ para $i \neq 3$

(IV) $x_1 = x'_1 + b$
$x_2 = x'_2 e^{-b}$
$x_0 = x'_0$
$x_3 = x'_3$,

donde b es un número real arbitrario.

Una división de los vectores tipo tiempo y nulos en vectores-+ y vectores-−, tal como se exige en (4), puede efectuarse definiendo ξ de modo que sea un vector-+ o un vector-−, según que el producto interior $(\xi u) = g_{ik}\, \xi^i\, u^k$ sea $>$ o <0.

Para probar (3) introducimos nuevas coordenadas r, φ, t, y (donde r, φ, t son coordenadas cilíndricas en los subespacios x_3 $=$const. y por su parte y es idéntico a x_3, salvo por un factor constante) mediante las siguientes fórmulas de transformación, que son fáciles de resolver con respecto a las x_i,

$$e^{x_1} = ch2r + \cos\, \varphi sh2r$$
$$x_2 e^{x_1} = \sqrt{2}\ \mathrm{sen}\ \varphi sh2r$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{x-2t}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-2r}\ \mathrm{tg}\ \frac{\varphi}{2}, \quad \text{donde} \quad \left|\frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right| < \frac{\pi}{2};$$
$$x_3 = 2y.$$

Esto nos lleva[10] a la expresión para el elemento lineal:

$$4\ a^2(dt^2 - dr^2 - dy^2 + (sh^4 r - sh^2 r)\ d\varphi^2 + 2\sqrt{2}\ sh^2 r d\varphi dt),$$

---

[10] El cálculo de esto es bastante complicado. Es más simple derivar ambas formas del elemento lineal independientemente una de la otra a partir del significado geométrico de S que se da más abajo. La primera forma se obtiene

el cual exhibe directamente la simetría rotacional, dado que las g_{ik} no dependen de φ.

La propiedad (6) se obtiene ahora fácilmente: si c se define mediante $shc=1$ (es decir, $c=\log(1+\sqrt{2})$), entonces para cualquier $R>c$ tenemos $sh^4R-sh^2R>0$; por lo tanto, el círculo definido por $r=R$, $t=y=0$ es tipo tiempo en todas partes (teniendo en cuenta que, por la definición anterior, la dirección positiva del tiempo es aquella en que φ es creciente). Por lo tanto, la línea definida por

$$r=R,\ \ y=0,\ \ t=-\alpha\varphi\ \ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

para un α suficientemente pequeño también será tipo tiempo en todas partes. Sin embargo, el punto inicial Q de esta línea (es decir, el punto que corresponde a $\varphi=0$) y el punto final P (es decir, el que corresponde a $\varphi=2\pi$) están situados sobre la línea-t: $r=R$, $y=\varphi=0$, y P precede a Q sobre esta línea si $\alpha>0$. Por sucesivas repeticiones de este procedimiento se puede alcanzar cualquier punto que preceda a Q sobre esta línea-t, y debido a la homogeneidad de la solución, lo mismo se puede hacer para cada punto.

La propiedad (7), teniendo en cuenta (2) y (4), es una consecuencia inmediata de (6). En efecto, un triespacio que satisfaciera las dos condiciones estipuladas en (7) en conjunción con el tiempo medido a lo largo de las líneas-universo de materia en su dirección positiva daría lugar a un sistema de coordenadas con la propiedad de que la coordenada 0-ésima siempre sería creciente en una dirección tipo tiempo positiva, en contradicción con (6), lo cual implica que todas las coordenadas de los puntos iniciales y final de una línea tipo-tiempo son iguales en ciertos casos.

La propiedad (5) para una coordenada temporal abierta es una consecuencia inmediata de la existencia de líneas tipo tiempo cerradas; para el caso de una coordenada temporal cerrada esa propiedad se sigue del hecho de que los subespacios t

---

tomando para el espacio-$x_1 x_2$ del sistema de coordenadas el conjunto de base de cualquier subgrupo biparamétrico del grupo multiplicativo de los cuaterniones hiperbólicos definidos en la nota 14.

$=$const. contradirían la propiedad (7) (como puede mostrarse fácilmente gracias a la conexión simple de S).

Para probar la propiedad (8), sea U un elemento de Σ; en tal caso U intersecta el subespacio S_0 de S definido por $x_3=0$ en una superficie V (pues tiene un punto en común con cada línea-x_0 situada sobre S_0). Ahora bien, según lo que se había probado, V no puede ser ortogonal a todas las líneas-x_0 de S_0. Así pues, sea l una línea-x_0 de S_0 sobre la que no es ortogonal, y sea P el punto de intersección de V y l. Entonces, al efectuar una rotación S_0 alrededor de l (y con cada S_b definido por $x_0=b$ por el mismo ángulo alrededor de la línea-x_0 obtenida a partir de l mediante la traslación $x_3'=x_3+b$), U se transforma en un triespacio distinto de U, pero que pasa por P, y que por lo tanto no está contenido en Σ, ya que se ha supuesto que los elementos de Σ son mutuamente excluyentes. Así pues, Σ se transforma en un sistema distinto de Σ.

4. Algunos teoremas y consideraciones adicionales sobre la solución

Quisiera mencionar aquí sin probarlo que, prescindiendo de la propiedad de conexión a nivel global (que puede modificarse si identificamos los puntos de ciertos conjuntos unos con otros), la solución presentada en este trabajo y el universo estático de Einstein son las únicas soluciones cosmológicas espacialmente homogéneas con densidad no-nula de materia y con líneas-universo de materia equidistantes[11].

El espacio S tiene un significado geométrico simple. Es el producto directo de una línea recta por el triespacio S_0 definido por $x_3=0$; y S_0 se obtiene a partir del espacio R de curvatura positiva constante y signatura $+\ -\ -$ extendiendo la métrica[12]

[11] Existen soluciones homogéneas estacionarias en las que las líneas-universo de materia no son equidistantes. Ellas llevan, sin embargo, a ciertas dificultades a consecuencia de la fricción interna que eso provocaría en el «gas» cuyas moléculas son las galaxias, a menos que el movimiento irregular de las galaxias sea cero y permanezca así.

[12] Por «extender la métrica en la proporción μ en la dirección de las líneas de un sistema π» quiero decir que se introduce una nueva distancia PQ' de los

en la proporción $\sqrt{2}:1$ en la dirección de un sistema de paralelas de Clifford tipo tiempo[13].

Esta definición de S_0 conduce también a una representación elegante de su grupo de transformaciones. A este fin aplicamos los puntos de R sobre los cuaterniones hiperbólicos $u_0+u_1j_1+u_2j_2+u_3j_3$ de valor absoluto positivo[14] por medio de coordenadas proyectivas[15] $u_0u_1u_2u_3$ elegidas de tal modo que la forma cuadrática fundamental de Klein pasa a tener la forma $u_0^2+u_1^2-u_2^2-u_3^2$. Entonces, cualquier movimiento $u \rightarrow u'$ de R sobre sí mismo puede representarse en la forma $u'=p\cdot u\cdot 9$, donde p y 9 son cuaterniones hiperbólicos de norma positiva. Un sistema π de paralelas de Clifford puede representarse por $\sigma^{\alpha}\cdot u$, donde σ es un cuaternión hiperbólico que sólo depende de π, y las líneas individuales de π se obtienen al asignar un valor fijo a u y hacer variar α de $-\infty$ a $+\infty$. De ahí se desprende que los movimientos de R sobre sí mismo que dejan π (y la orientación de sus líneas) invariante están representados por $u'=\sigma^{\beta}\cdot u\cdot 9$, donde β

---

puntos del entorno mediante la ecuación $(PQ')^2=PR^2+(\mu\cdot RQ)^2$, donde R es el pie de la perpendicular trazada desde P a la línea π pasando por Q; o, dicho en otros términos: $(ds')^2=ds^2+(\mu^2-1)\,(v_i dx_i)^2$, donde v es el cuerpo de los vectores tangentes de longitud unidad de las líneas de π.

[13] Esto es, un sistema de pares de rectas equidistantes tal que, para cada punto del espacio, existe exactamente una línea que pasa por él.

[14] Aquí los u_i son números reales y las unidades j_n se definen así: $j_1=i_1, j_2=i\cdot i_2, j_3=i\cdot i_3$, donde las i_n son las unidades de los cuaterniones ordinarios e i es la unidad imaginaria, la cual se supone que conmuta con todas las i_n. El término «cuaterniones hiperbólicos» aparece en la literatura con un sentido diferente, pero el sistema numérico que acabamos de definir es evidentemente lo que debería ser denominado de este modo. En efecto, $\mathrm{norm}(u)=u\cdot\bar{u}=u_0^2+u_1^2-u_2^2-u_3^2$, y además, el grupo multiplicativo de estos cuaterniones, si se identifican cuaterniones que difieren en un factor real, es isomorfo al grupo de transformaciones del plano lobachevskiano sobre sí mismo. Que la métrica de R permanece invariante bajo las transformaciones dadas en el texto se sigue inmediatamente de la ecuación $\mathrm{norm}(uv)=\mathrm{norm}(u)\cdot\mathrm{norm}(v)$.

[15] Hay que hacer notar, sin embargo, que existen formas topológicas diferentes de los espacios de curvatura positiva constante y de signatura -1, y que la forma que puede representarse en coordenadas proyectivas de manera biunívoca no conduce exactamente al espacio S definido antes, sino a un espacio que se obtiene a partir de S al identificar cualesquiera dos puntos que estén situados sobre la misma línea del sistema π y cuya distancia sobre esa línea sea igual a cierta constante. La diferencia correspondiente subsiste para los grupos de transformaciones.

recorre todos los números reales y u todos los cuaterniones hiperbólicos de norma positiva. Es evidente, no obstante, que estos movimientos forman el grupo continuo cuatriparamétrico de transformaciones que trasladan S_0 sobre sí mismo. Las líneas de π, naturalmente, son las líneas-universo de materia.

Evidentemente, sea cuál sea la proporción μ en que se extienda la métrica de R en la dirección de las líneas de π, el espacio R' resultante posee una simetría rotacional. En consecuencia, el tensor de Riemann contraído de $R' \times l$ (donde l es una línea recta), bajo la condición de que el sistema de coordenadas sea ortogonal en el punto considerado, y que su primer vector $e^{(0)}$ de la base tenga la dirección de las líneas-π y el último $e^{(3)}$ la dirección de l, tiene la forma

$$\begin{vmatrix} a & & & \\ & b & 0 & \\ & 0 & b & \\ & & & 0 \end{vmatrix},$$

donde a y b son funciones de μ. Haciendo los cálculos pertinentes se ve que para $\mu=\sqrt{2}$ se obtiene $b=0$, es decir, $R_{ik}=a \cdot e_i^{(0)} e_k^{(0)}$, lo cual permite que se satisfagan las ecuaciones de campo del modo descrito más arriba.

Por lo que se refiere al significado físico de la solución propuesta en este artículo, está claro que de ella no se desprende ningún desplazamiento hacia el rojo para objetos distantes. En efecto, usando la transformación (I) definida en la prueba de las propiedades (1) y (2), se demuestra inmediatamente que las señales luminosas enviadas desde una partícula de materia (que aparece en la solución) a otra llegan con los mismos intervalos temporales con que se envían. Para el período de rotación se obtiene $2 \cdot 10^8$ años si se sustituye ρ por el valor 10^{-30} g/cm^3. Si suponemos que los sistemas galácticos se formaron por condensación de materia que originariamente estaba distribuida uniformemente, y si tomamos el valor 1:200 como proporción de la contracción (valor sugerido por la proporción media observada de 1:200 entre el diámetro y la distancia de las galaxias), se obtiene (usando la ley de conservación del momento angular) para el período medio de rotación de los sistemas galácticos 5

$\cdot 10^8$ años. Este número es del orden de magnitud correcto, pero, teniendo en cuenta que esto debería ser aproximadamente el período de rotación en las partes externas de las nebulosas, se encuentra que el valor observado es considerablemente mayor[16]. Naturalmente, tal comparación con la observación tiene muy poco significado si antes no se ha combinado una expansión con la rotación. Además, habría que hallar una explicación para la aparente irregularidad de la distribución de los ejes de rotación de las galaxias. No obstante, esto quizá no sea imposible, dado que existen varias circunstancias que podrían tender a desfigurar el orden original, o a hacerlo aparecer desfigurado, especialmente si los ejes de rotación de la materia en lugares diferentes (a diferencia de la solución arriba descrita) no fueran paralelos entre sí. El radio de los círculos tipo tiempo más pequeño es, en la solución presentada en este artículo, del mismo orden de magnitud que el radio universal en el universo estático de Einstein.

---

[16] De los datos numéricos que proporciona E. Hubble, *Astrophys. J.* 79, 74 (1934), sobre dos galaxias de tamaño medio se desprenden períodos de rotación de $2 \cdot 10^7$ y $7 \cdot 10^7$ años a una distancia de aproximadamente la mitad del radio desde el centro. Se calcula que el período de rotación de la nebulosa Andrómeda es de $1{,}5 \cdot 10^7$ en la región central.

Introducción a:
Una observación sobre la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía idealista

La «biblioteca de filósofos vivientes», editada por P. A. Schilpp, contiene volúmenes colectivos dedicados a varios pensadores importantes. Gödel contribuyó a dos de ellos, el dedicado a B. Russell (publicado en 1944), para el que escribió «La lógica matemática de Russell», y al dedicado a A. Einstein (publicado en 1949), para el que escribió «Una observación sobre la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía idealista». En esta contribución al volumen dedicado a Einstein Gödel saca las consecuencias filosóficas de los resultados matemáticos presentados en «Un ejemplo de un nuevo tipo de soluciones cosmológicas de las ecuaciones einsteinianas del campo gravitatorio».

Gödel entiende aquí por filosofía idealista aquella que niega la realidad objetiva del tiempo y, por tanto, también la del cambio. Ya la teoría especial de la relatividad había mostrado que no es posible considerar la simultaneidad como una relación absoluta. Pero la distribución de la materia en el universo y la curvatura del espacio-tiempo por ella determinada permiten considerar, desde la perspectiva de la teoría general de la relatividad, un tiempo cósmico universal. Sin embargo, precisamente Gödel acababa de descubrir soluciones de las ecuaciones del campo gravitatorio de la relatividad general que determinan

un modelo de universo en el que es imposible encajar los tiempos locales de los observadores particulares en un tiempo cósmico y en el que el tiempo pierde su carácter absoluto. En ese universo gödeliano es posible viajar por el tiempo hacia adelante y hacia atrás –por ejemplo, a hace tres años– igual que por el espacio, al menos en principio (aunque en la práctica no sea factible, dada la cantidad de energía necesaria para el viaje).

Gödel no pretende que ese universo posible sea el real. Pero, como él escribe, «el mero hecho de la compatibilidad con las leyes de la naturaleza de los universos en los que no se puede distinguir un tiempo absoluto y, por tanto, en los que no puede existir un lapso objetivo de tiempo, arroja algo de luz sobre el significado del tiempo también en los universos en los que se *puede* definir un tiempo absoluto». La objetividad del tiempo no sería una necesidad conceptual, sino una mera consecuencia contingente de la distribución fáctica de la materia en el universo.

La contribución de Gödel apareció bajo el título *A remark about the relationship between relativity theory and idealistic philosophy* (Una observación sobre la relación entre la teoría de la relatividad y la filosofía idealista) en el volumen *Albert Einstein, Philosopher-Scientist* (editado por Paul A. Schilpp), The Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois (1949), págs. 555-562.

J. M.

UNA OBSERVACION SOBRE LA RELACION ENTRE LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD Y LA FILOSOFIA IDEALISTA

Uno de los aspectos más interesantes de la teoría de la relatividad para una persona con intereses filosóficos consiste en el hecho de que proporcionó una visión nueva y sorprendente de la naturaleza del tiempo, ese ente misterioso y aparentemente contradictorio[1] que, por otra parte, parece constituir la base de la existencia del mundo y de nuestra propia existencia. El punto de partida crucial de la teoría de la relatividad especial consiste en el descubrimiento de una propiedad nueva y muy asombrosa del tiempo, a saber, la relatividad de la simultaneidad, que en gran medida implica también[2] la relatividad de la sucesión temporal. La afirmación de que los sucesos *A* y *B* son simultáneos (y también, para una gran clase de pares de sucesos, la afirmación de que *A* ocurrió antes que *B*) pierde su significado objetivo en la medida en que otro observador puede afirmar, con las mismas pretensiones de validez, que *A* y *B* no son simultáneos (o que *B* ocurrió antes que *A*).

---

[1] Véase, por ejemplo, J. M. E. McTaggart, «The Unreality of Time», *Mind*, 17, 1908.

[2] Al menos si se exige que dos sucesos puntuales cualesquiera o bien sean simultáneos o bien uno siga al otro, es decir, que la sucesión temporal defina una ordenación lineal completa de todos los sucesos puntuales. Existe una ordenación parcial absoluta.

Si seguimos las consecuencias de esta extraña situación, nos vemos llevados a conclusiones sobre la naturaleza del tiempo que son ciertamente de gran alcance. Dicho brevemente, parece que obtenemos una prueba inequívoca de la concepción de los filósofos que, como Parmenides, Kant y los idealistas modernos, niegan la objetividad del cambio y consideran que el cambio es una ilusión o una apariencia debida a nuestro especial modo de percepción[3]. El argumento es como sigue: el cambio sólo es posible a través de un lapso de tiempo. La existencia de un lapso objetivo de tiempo[4], no obstante, significa (o, al menos, es equivalente al hecho de) que la realidad consiste en una infinidad de estratos de «ahoras» que pasan a existir sucesivamente. Pero si la simultaneidad es algo relativo en el sentido que acabamos de explicar, entonces la realidad no se puede dividir en tales estratos de una manera objetivamente determinada. Cada observador tiene su propio conjunto de «ahoras», y ninguno de esos

---

[3] Kant (en la *Crítica de la razón pura*, 2.ª ed., 1787) expresa esta idea en los siguientes términos: «aquellas afecciones que nos representamos como cambios darían lugar, en seres con otras formas de cognición, a una percepción en la que la idea de tiempo, y por tanto también la de cambio, no se manifestaría en absoluto». Esta formulación concuerda tan bien con la situación dada en la teoría de la relatividad que uno casi se siente tentado a añadir: tal como, por ejemplo, una percepción de la inclinación de las líneas-universo de materia relativamente entre sí en el espacio de Minkowski.

[4] Uno puede adoptar el punto de vista de que la idea de un lapso objetivo de tiempo (cuya esencia es que lo único que realmente existe es el presente) carece de sentido. Pero esto no es una salida al dilema; pues esta opinión en sí misma equivale ya a tomar el punto de vista idealista con respecto a la idea de cambio, exactamente igual que los filósofos que la consideran contradictoria. Pues en ambas concepciones se niega que un lapso objetivo de tiempo sea un posible estado de cosas y *a fortiori* que exista en la realidad, y en este contexto poco importa que consideremos esa idea como carente de sentido o bien como contradictoria. Naturalmente, para los que adoptan cualquiera de estos dos puntos de vista, el argumento basado en la teoría de la relatividad que se expone a continuación es innecesario; no obstante, incluso para ellos puede ser interesante el hecho de que quizá exista una segunda prueba de la irrealidad del cambio basada en razones enteramente distintas, especialmente si tenemos en cuenta que la afirmación que hay que probar choca frontalmente con el sentido común. Puede encontrarse una discusión particularmente clara del tema, independiente de la teoría de la relatividad, en: Paul Mongré, *Das Chaos in kosmischer Auslese*, 1898.

diversos sistemas de estratos puede pretender tener la prerrogativa de representar el lapso objetivo de tiempo[5].

Esta inferencia ha sido señalada por algunos autores filosóficos, si bien por un número sorprendentemente escaso, pero no ha permanecido incontestada. Y, en realidad, se puede objetar al argumento en la forma en que lo acabamos de presentar que la equivalencia completa de todos los observadores aunque se muevan con velocidades diferentes (pero uniformes), que es el punto esencial en él, sólo subsiste en el esquema abstracto del espacio-tiempo de la teoría de la relatividad especial y en ciertos universos vacíos de la teoría de la relatividad generalizada. Pero la existencia de materia, así como el tipo particular de curvatura del espacio-tiempo producida por ella, destruyen en gran parte la equivalencia de los diferentes observadores[6] y permiten distinguir a algunos especialmente, a saber, a aquellos cuya noción del tiempo concuerda con el movimiento medio de la materia[7]. Ahora bien, en todas las soluciones cosmológicas de

---

[5] Podría objetarse que este argumento sólo muestra que un lapso de tiempo es algo relativo, lo cual no excluye que sea algo objetivo; en cambio, los idealistas sostienen que es algo meramente imaginado. Sin embargo, un lapso relativo de tiempo, suponiendo que se le pueda dar un sentido a esta expresión, sería ciertamente algo enteramente distinto del lapso de tiempo en el sentido corriente, el cual significa un cambio en lo que existe. El concepto de existencia, no obstante, no puede relativizarse sin que se destruya completamente su sentido. También podría objetarse que el argumento considerado sólo muestra que el tiempo transcurre de modos distintos para distintos observadores, mientras que el transcurso del tiempo en sí mismo, en cambio, puede ser una propiedad intrínseca (absoluta) del tiempo o de la realidad. Pero un lapso de tiempo que no sea un lapso en algún sentido definido me parece tan absurdo como un objeto coloreado que no tenga colores definidos. Pero incluso si una cosa semejante fuera concebible, sería también algo totalmente distinto de la idea intuitiva de lapso de tiempo, a la que se refiere la afirmación idealista.

[6] Naturalmente, de acuerdo con la teoría de la relatividad, todos los observadores son equivalentes en la medida en que las leyes del movimiento y de la interacción de materia y campo son las mismas para todos ellos. Pero esto no excluye que la estructura del universo (es decir, la verdadera estructuración de materia, movimiento y campo) pueda ofrecer aspectos muy distintos a observadores distintos, y que a algunos de ellos les puede ofrecer un aspecto más «natural» y a otros uno distorsionado. Dicho sea de paso, el observador no juega ningún papel esencial en estas consideraciones. El punto básico, naturalmente, es que el universo en sí mismo tiene ciertas direcciones distinguidas, que definen directamente ciertos tiempos locales distinguidos.

[7] El valor del movimiento medio de la materia puede depender esencialmente

las ecuaciones gravitatorias (es decir, en todos los universos posibles) que se conocen hasta el presente los tiempos locales de todos *estos* observadores encajan en un solo tiempo universal, de modo que, por lo que parece, resulta posible considerar este tiempo como el «verdadero», que dura objetivamente, mientras que las discrepancias en los resultados de las medidas de otros observadores respecto de este tiempo pueden considerarse como debidas a la influencia que ejerce un movimiento relativo con respecto al estado medio del movimiento de la materia sobre los procesos de medición y sobre los procesos físicos en general.

Partiendo de esta situación, y teniendo en cuenta el hecho de que algunas de las soluciones cosmológicas conocidas parecen representar nuestro mundo correctamente, James Jeans ha sacado la conclusión[8] de que no hay razón para abandonar la idea intuitiva de que hay un tiempo absoluto que dura objetivamente. No creo que la situación justifique esta conclusión y baso mi opinión principalmente[9] en los siguientes hechos y consideraciones:

Existen soluciones cosmológicas de tipo distinto[10] a las

---

del tamaño de las regiones sobre las que se toma la media. Lo que puede denominarse el «movimiento medio verdadero» se obtiene tomando regiones lo bastante extensas como para que un aumento ulterior de su tamaño ya no cambie esencialmente el valor obtenido. En nuestro universo, esto es el caso para regiones que incluyen muchos sistemas galácticos. Naturalmente, no tiene por qué existir necesariamente un movimiento medio verdadero en este sentido.

[8] Véase *Man and the Universe*, Sir Halley Stewart Lecture (1935), 22-23.

[9] Otra circunstancia que invalida el argumento de Jeans es que el procedimiento descrito sólo proporciona una definición aproximada de un tiempo absoluto. No cabe duda de que es posible afinar el procedimiento hasta obtener una definición precisa, pero quizá sólo a base de introducir elementos más o menos arbitrarios (tales como, por ejemplo, el tamaño de las regiones o la función peso que hay que utilizar en el cálculo del movimiento medio de la materia). Es dudoso que exista una definición precisa cuyos méritos fueran lo bastante grandes como para que hubiera razón suficiente para considerar el tiempo así obtenido exactamente como el verdadero.

[10] La propiedad física más notable que distingue estas soluciones de las que se conocen hasta el presente es que en ellas se da en todos los puntos una rotación de la brújula de inercia relativamente a la materia, lo cual significaría en nuestro universo una rotación relativa a la totalidad de los sistemas galácticos. Es apropiado, por lo tanto, llamar a estos universos «universos rotatorios». En las consideraciones que siguen me refiero a un tipo particular de universos en rotación, que poseen las propiedades adicionales de ser estáticos, espacialmente

conocidas hasta el presente, a las que no se puede aplicar el procedimiento antes mencionado de definir un tiempo absoluto, porque los tiempos locales de los observadores especiales usados antes no pueden encajar en un único tiempo universal. Ni tampoco puede existir para ellos otro procedimiento que cumpliese este propósito; es decir, estos universos poseen tales propiedades de simetría que, para cada concepto posible de simultaneidad y sucesión, existen otros que no pueden distinguirse de él por ninguna propiedad intrínseca, sino sólo por referencia a objetos individuales, tales como, por ejemplo, un sistema galáctico particular.

En consecuencia, la inferencia hecha al principio sobre la no-objetividad del cambio se aplica sin duda al menos a estos universos. Además, resulta que las condiciones temporales de estos universos (al menos aquellas a las que nos hemos referido al final de la nota 10) muestran otras características sorprendentes, que refuerzan el punto de vista idealista. En efecto, si en estos universos hacemos un viaje de ida y vuelta en un cohete sobre una curva suficientemente amplia, es posible viajar a cualquier región del pasado, presente y futuro, y volver, exactamente del mismo modo como en otros universos es posible viajar a regiones distantes del espacio.

Esta situación parece implicar un absurdo. Pues le permite a uno viajar, por ejemplo, al pasado reciente de los lugares en los que él mismo ha vivido. Allí encontraría una persona que sería uno mismo en un período anterior de su vida. Entonces podría hacerle algo a esa persona que él sabe, por su memoria, que no le ha ocurrido. Estas contradicciones y otras similares, no obstante, para que prueben la imposibilidad de los universos en consideración presuponen que es realmente practicable el viaje de uno mismo a su pasado. Pero las velocidades que serían necesarias para completar el viaje en un lapso razonable de tiempo[11]

---

homogéneos y de tener una constante cosmológica <0. Para la representación matemática de estas soluciones, véase mi artículo de próxima publicación en la *Rev. Mod. Phys.* [[pág. 365 del presente libro]].

[11] Si basamos el cálculo en una densidad media de materia igual a la que se observa en nuestro universo y admitimos que fuéramos capaces de transformar la materia completamente en energía, el peso del «combustible» del cohete requerido para completar el viaje en t años (tiempo medido por el cosmonauta)

superan en mucho cualquier magnitud que pueda esperarse nunca que llegue a ser una posibilidad práctica. Por lo tanto, no puede excluirse *a priori*, sobre la base del argumento dado, que la estructura del espacio-tiempo del mundo real sea del tipo descrito.

En cuanto a las conclusiones que podrían sacarse de la situación descrita para la cuestión que se considera en este artículo, el punto decisivo es éste: que para *cualquier* definición posible de un tiempo universal, podríamos viajar a regiones del universo que son pasadas de acuerdo con esa definición[12]. Esto muestra nuevamente que en estos universos perdería toda justificación admitir un lapso objetivo de tiempo. Pues, sea cual sea el modo en que se suponga que el tiempo transcurre, existirán siempre observadores posibles, a cuya experiencia del lapso de tiempo transcurrido no corresponda ningún lapso objetivo (en particular también, observadores posibles cuya existencia entera no será objetivamente simultánea). Pero si la experiencia del lapso de tiempo transcurrido puede existir sin un lapso de tiempo objetivo, no puede darse ninguna razón por la que haya que admitir un lapso objetivo de tiempo en absoluto.

Sin embargo, podemos preguntar: ¿de qué nos sirve que tales condiciones se den en ciertos universos *posibles*? ¿Tiene esto alguna consecuencia para la cuestión que nos interesa, a saber, la de si en *nuestro* universo existe un lapso objetivo de tiempo? Creo que sí. En efecto, (1) ciertamente es difícil imaginar que nuestro universo puede representarse por el tipo particular de soluciones de rotación a las que nos hemos referido antes (porque estas soluciones son estáticas y, por lo tanto, no proporcionan ningún desplazamiento hacia el rojo para los objetos distantes); sin embargo, también existen soluciones de rotación para universos *en expansión*. En tales universos puede

---

tendría que ser del orden de magnitud de $\frac{10^{22}}{t^2}$ veces el peso de la nave (suponiendo que el regreso también se efectuara por retroceso). Esta evaluación se aplica a $t << 10''$. Sea cual sea el valor de t, la velocidad de la nave debe ser al menos $1/\sqrt{2}$ veces la velocidad de la luz.

[12] A este fin serían suficientes velocidades incomparablemente menores. Bajo los supuestos hechos en la nota 11, el peso del combustible tendría que ser a lo sumo del mismo orden de magnitud que el peso de la nave.

que tampoco exista un tiempo absoluto[13], y no es imposible que nuestro universo sea de este tipo. (2) El mero hecho de la compatibilidad con las leyes de la naturaleza[14] de los universos en los que no se puede distinguir un tiempo absoluto y, por tanto, en los que no puede existir un lapso objetivo de tiempo, arroja algo de luz sobre el significado del tiempo también en los universos en los que se *puede* definir un tiempo absoluto. Pues si alguien afirma que este tiempo absoluto está transcurriendo, debe aceptar como consecuencia que la existencia o inexistencia de un lapso objetivo de tiempo (es decir, la existencia o inexistencia de un tiempo en el sentido corriente del término) depende del modo particular en que la materia y su movimiento están distribuidos en el universo. Esto no es una contradicción directa; no obstante, es difícil considerar como satisfactoria una concepción filosófica que lleve a tales consecuencias.

---

[13] Al menos si se exige que las experiencias sucesivas de un observador no deberían ser nunca simultáneas en el tiempo absoluto o (lo que es equivalente) que el tiempo absoluto debería concordar en dirección con los tiempos de todos los observadores posibles. Sin esta condición, existe siempre un tiempo absoluto en un universo en expansión (y homogéneo). Siempre que hablo de tiempo «absoluto», esto siempre hay que entenderlo, naturalmente, con la restricción que hemos explicado en la nota 9, que también se aplica a otras definiciones posibles de un tiempo absoluto.

[14] La solución considerada antes sólo prueba la compatibilidad con la forma general de las ecuaciones de campo en que se deja abierto el valor de la constante cosmológica; no obstante, este valor, que hasta el presente no se conoce con seguridad, forma parte evidentemente de las leyes de la naturaleza. Pero otras soluciones de rotación puede que hagan el resultado independiente del valor de la constante cosmológica (o, mejor dicho, de su anulación o no-anulación y de su signo, dado que su valor numérico no es relevante para este problema). En cualquier caso, primero habría que responder a estas cuestiones en un sentido no-favorable antes de que pudiéramos pensar en sacar una conclusión como la de Jeans que hemos mencionado antes. *Nota añadida el* 2 *de septiembre de* 1949: con posterioridad he hallado que, para *cualquier* valor de la constante cosmológica, existen efectivamente soluciones en las que no hay un tiempo universal que satisfaga la condición de la nota 13. *K. G.*

Introducción a:
Universos rotatorios en la teoría general de la relatividad

En «Un ejemplo de un nuevo tipo de soluciones cosmológicas a las ecuaciones einsteinianas del campo gravitatorio», Gödel había presentado soluciones que determinaban un modelo de universo rotatorio, infinito y estacionario, con líneas cerradas de tipo temporal. Evidentemente, el carácter estacionario de ese universo posible lo hacía incompatible con nuestro universo real, que es un universo en expansión. Ya en su contribución al volumen *Albert Einstein, Philosopher-Scientist* había indicado Gödel que existen otras soluciones que determinan universos rotatorios no estáticos, sino en expansión.

En su comunicación «Universos rotatorios en la teoría general de la relatividad» al Congreso internacional de matemáticos celebrado en Cambridge (Massachusetts) en 1950, Gödel presentó una amplia gama de soluciones de las ecuaciones del campo gravitatorio, que determinan diversos universos posibles, todos ellos rotatorios, espacialmente homogéneos y finitos. En estos nuevos modelos rotatorios la existencia o no existencia de líneas cerradas de tipo temporal depende de la rotación. Si la velocidad lineal máxima provocada por la rotación no excede c, tales líneas cerradas no pueden existir.

Esta comunicación se limita a indicar los resultados alcanzados por Gödel en su estudio de los universos rotatorios, sin

proporcionar las pruebas de tales resultados. Apareció bajo el título *Rotating universes in general relativity theory* (Universos rotatorios en la teoría general de la relatividad) en los *Proceedings of the 11th International Congress of Mathematicians in Cambridge, Massachusetts* 1950, I, American Mathematical Society (Providence 1952), págs. 175-181.

J. M.

UNIVERSOS ROTATORIOS EN LA TEORIA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

En esta conferencia me dispongo a exponer los principales resultados (en su mayor parte sin prueba) a que me han conducido hasta ahora mis investigaciones sobre universos rotatorios.

1. *Definición del tipo de soluciones rotacionales a considerar.*

Parto de las ecuaciones de campo relativistas[1]:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik} - \lambda g_{ik} \tag{1}$$

y de los siguientes supuestos:

1) La velocidad relativa de masas (es decir, sistemas galácticos) cercanas entre sí es pequeña comparada con c.

2) No interviene ningún otro tipo de fuerza aparte de la gravitación.

Bajo estos supuestos, T_{ik} toma la forma:

$$T_{ik} = \rho v_i v_k , \tag{2}$$

[1] Aquí estoy suponiendo que se introducen unidades de medida tales que resulta $c=1$, $8\pi\kappa/c^2=1$.

donde:

(3) $$\rho > 0,$$

(4) $$g^{ik} v_i v_k = -1,$$

y, naturalmente:

(5) la signatura de g_{ik} es $+2$.

La velocidad angular local de la materia relativa a la brújula de la inercia puede representarse mediante el siguiente vector ω (el cual siempre será ortogonal a v):

(6) $$\omega^i = \frac{\varepsilon^{iklm}}{12(-g)^{1/2}} a_{klm},$$

donde el tensor simétrico oblicuo a_{klm} viene definido por:

(7) $$a_{klm} = v_k \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_m} - \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \right) + v_l \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \right) + v_m \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right).$$

Que ω representa la velocidad angular relativa al alcance de la inercia puede verse como sigue: en un sistema de coordenadas que, en su origen, es geodésico y normal, y en cuyo origen la materia está en reposo (es decir, para el cual se cumple en 0: $\partial g_{ik}/\partial x_l = 0$, $g_{ik} = \eta_{ik}$, $v^4 = 1$, $v^i = 0$ para $i \neq 4$)[2], se obtiene para ω^i en 0:

(8) $$\omega^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^3}{\partial x_2} - \frac{\partial v^2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{v^3}{v^4} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{v^2}{v^4} \right) \right), \text{ etc.}$$

[2] Un sistema de coordenadas que cumpla las dos primeras condiciones puede llamarse apropiadamente un «sistema inercial local».

(9) $$\omega^4 = 0 .$$

En un sistema de coordenadas tal, no obstante, dado que un desplazamiento paralelo (en el origen) implica la constancia de sus componentes, la velocidad angular relativa al alcance de la inercia, en 0, viene dada por las mismas expresiones que en la física newtoniana, es decir, los miembros de la derecha de (8) son sus componentes. *Evidentemente, ω es el único vector cuyos tres primeros componentes, en los sistemas de coordenadas particulares que hemos definido, coinciden con la velocidad angular calculada como si fuera en la física newtoniana y cuyo cuarto componente es* 0.

Cualquier 4-espacio de Riemann con ciertas ρ, v_i definidas en él, que satisfaga en todos los puntos las condiciones (1)-(5) y no permita ninguna extensión libre de singularidades, y para el cual, además, ω sea continuo y $\neq 0$ en cualquier punto, representa un universo en rotación. Sin embargo, en lo que sigue me voy a ocupar principalmente de soluciones que satisfacen los tres postulados adicionales siguientes (sugeridos tanto por la observación como por la teoría):

I. La solución tiene que ser homogénea en el espacio (es decir, para dos líneas-universo de materia cualesquiera *l*, *m*, debe existir una transformación de la solución sobre sí misma que transporta *l* sobre *m*).

II. El espacio debe ser finito (es decir, el espacio topológico cuyos puntos son las líneas-universo de materia debe ser cerrado, o sea, compacto).

III. ρ no debe ser una constante.

El postulado III también es indispensable para universos rotatorios, puesto que puede probarse que *un desplazamiento al rojo tal que, para distancias pequeñas, aumente linealmente con la distancia implica una expansión, tanto si el universo está en rotación como si no*[3].

[3] Suponiendo, naturalmente, que las constantes atómicas no varíen en el tiempo y en el espacio o, para ser más exactos, suponiendo que los números sin dimensiones definibles en términos de las constantes de la naturaleza (tales como e^2/hc) son los mismos en todas partes.

En cuanto a la cuestión de la existencia de soluciones rotacionales que satisfagan los postulados I, II, III, véase § 5.

2. Algunas propiedades generales de estas soluciones

Teniendo en cuenta III, la ecuación $\rho=\text{const.}$ define un sistema uniparamétrico de 3-espacios. *En los universos rotatorios, estos 3-espacios de densidad constante no pueden ser ortogonales a las líneas-universo de materia.* Esto se desprende inmediatamente del hecho de que $a_{klm}=0$ es la condición necesaria y suficiente para la existencia de *cualquier* sistema de 3-espacios ortogonal a un cuerpo v de vectores.

La inclinación de las líneas-universo de materia con respecto a los espacios de densidad constante proporciona un *criterio observacional necesario y suficiente para la rotación de un universo en expansión espacialmente homogéneo y finito:* a saber, *para distancias suficientemente grandes, tiene que haber más galaxias en una mitad del cielo que en la otra mitad.*

En primera aproximación, es decir, para soluciones que difieren poco de una que sea espacialmente isótropa, la magnitud de este efecto viene dada por el teorema siguiente: *si N_1, N_2 son el número de galaxias en los dos hemisferios en los que se puede descomponer una esfera espacial*[4] *de radio r (pequeño comparado con el radio universal R) mediante un plano ortogonal a ω, entonces:*

$$\frac{|N_1-N_2|}{N_1+N_2}=\frac{9}{8}\cdot\frac{|\omega|rRh}{c^2}, \tag{10}$$

donde h es la constante de Hubble ($=\dot{R}/R$).

Para valores plausibles de las constantes (en que el valor aproximado de ω se deriva a partir de la velocidad de rotación de las galaxias[5]), este efecto es extremadamente pequeño. Pero la

[4] Es decir, una situada en un 3-espacio ortogonal a v en el punto considerado.

[5] Véase mi artículo en *Reviews of Modern Physics*, vol. 21 (1949), p. 450.

incertidumbre en nuestro conocimiento de las constantes es demasiado grande para que podamos sacar cualquier conclusión definitiva.

El grupo de transformaciones que existe debido a I transporta evidentemente cada uno de los espacios $\rho = \text{const.}$ sobre sí mismo, y por lo tanto (si excluimos el caso de isotropía) sólo puede tener 3 ó 4 parámetros[6]. El número 4 (es decir, el caso de simetría rotacional) tampoco puede darse. *No existen universos rotatorios rotacionalmente simétricos que satisfagan las condiciones enunciadas* en § 1[7]. La única simetría alrededor de un punto que puede darse es la de una rotación de magnitud π. A este caso nos referiremos como caso simétrico.

En cualquier caso, el grupo de transformaciones ha de ser triparamétrico. Dado que, además, debido a II, debe ser compacto, y dado que (como puede mostrarse fácilmente) no puede ser conmutativo en universos rotatorios[8], se sigue que *el grupo de transformaciones de cualquier solución rotacional del tipo caracterizado en* § 1 *debe ser isomorfa* (*como grupo de transformaciones*) *con las traslaciones derechas* (*o las izquierdas*) *de un* 3-*espacio de curvatura positiva constante, o con esas traslaciones más ciertas rotaciones de ángulo* π. De ahí que también la conexión topológica del espacio debe ser la de un 3-espacio esférico o elíptico.

La métrica g_{ik} puede descomponerse (relativamente a las líneas-universo de materia) en una métrica espacial $\overline{g_{ik}}$ y una métrica temporal $\overline{\overline{g_{ik}}}$ definiendo la distancia espacial entre dos puntos P_1, P_2 de un entorno como la distancia ortogonal entre dos líneas-universo de materia que pasan por P_1, P_2, y la distancia temporal como la proyección ortogonal de $P_1 P_2$ sobre una de estas dos líneas. Es evidente que esta descomposición es exactamente la que se verifica (a pequeña escala) para observadores que se muevan a lo largo de las líneas-universo de materia.

Tiene las siguientes propiedades:

---

[6] En cada espacio $\rho = \text{const.}$ existe una métrica definida positiva que es transportada sobre sí misma, a saber, la métrica h_{ik} definida más abajo.

[7] Esto es válido incluso con independencia del postulado II (la finitud del espacio).

[8] La razón es que el *rot* de un cuerpo vectorial que es invariante bajo un grupo conmutativo transitivo se anula idénticamente.

$$(11)\qquad \overline{\overline{g_{ik}}} = -v_i v_k\,, \quad \overline{g_{ik}} = g_{ik} + v_i v_k\,,$$

$$\mathrm{Det}(\overline{g_{ik}}) = \mathrm{Det}(\overline{\overline{g_{ik}}}) = 0\,.$$

Si el sistema de coordenadas se escoge de tal modo que las líneas-x_4 sean las líneas-universo de materia y la coordenada-x_4 mida la longitud de estas líneas, $\overline{g_{ik}}$ toma la forma:

$$(12)\qquad \overline{g_{ik}} = \begin{Vmatrix} h_{ik} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(donde h_{ik} es positivo definido) y la constante de Hubble resulta ser en la dirección espacial dx_i (ortogonal a v), según la medición hecha por un observador que se mueve junto con la materia, igual a:

$$\frac{1}{2}\frac{\dot{h}_{ik}dx^i dx^k}{h_{ik}dx^i dx^k}, \quad \text{donde} \quad \dot{h}_{ik} = \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_4}.$$

La superficie $\dot{h}_{ik}x_i x_k = 1$ en el subespacio tridimensional, ortogonal a v, del espacio tangente, puede denominarse la elipsoide de la expansión o, más generalmente, la forma cuadrática de la expansión.

El teorema sobre la inexistencia de soluciones simétricas rotacionales[9], *bajo la hipótesis adicional de que el universo no contiene ninguna línea tipo tiempo cerrada* (véase § 3), puede extenderse hasta el enunciado de que *la forma cuadrática de la expansión no puede ser rotacionalmente simétrica alrededor de ω en ningún instante del tiempo.* En particular, nunca podrá ser una esfera, es decir, la expansión está necesariamente asociada a una deformación. Esto incluso es válido para *todas* las soluciones que satisfacen I-III y proporciona otra propiedad directamente observable de los universos en rotación de este tipo.

Además, la asimetría de la expansión alrededor de ω abre la posibilidad de una explicación de la estructura espiral de las

[9] Este teorema hace muy plausible que no existan soluciones espacialmente homogéneas, rotacionales y en expansión, en las cuales la elipsoide de la expansión sea en forma *permanente* rotacionalmente simétrica alrededor de ω.

galaxias. En efecto, si se forma una condensación bajo esas circunstancias, lo más probable es que se transforme en un cuerpo oblongo en rotación alrededor de uno de sus ejes menores; y, en el transcurso del tiempo, debido a que las partes externas poseerán una rotación más lenta, un cuerpo así se curvará en una espiral. Falta por ver si una elaboración cuantitativa de esta teoría sobre la formación de espirales llevará a un acuerdo con la observación.

3. Rotación y métrica temporal

Las fórmulas (6), (7) y (11) muestran que es, en primer lugar, la métrica temporal (relativa a los observadores que se muevan junto con la materia) lo que determina el comportamiento del alcance de la inercia. De hecho, *una condición necesaria y suficiente para que un universo espacialmente homogéneo esté en rotación es que la simultaneidad local de los observadores que se mueven junto con la materia no sea integrable* (es decir, no defina una simultaneidad global). Esta propiedad de la métrica temporal de los universos rotatorios se halla estrechamente conectada con la posibilidad de líneas tipo tiempo cerradas.

Esta última anomalía, no obstante, sólo ocurre si la velocidad angular sobrepasa un cierto límite. Hablando en términos inexactos, este límite es el valor de $|\omega|$ para el cual la velocidad lineal máxima causada por la rotación resulta ser igual a c; es decir, es aproximadamente c/R si, en el momento considerado, la métrica espacial en el 3-espacio $\rho=$const. no difiere demasiado de un espacio de curvatura constante $1/R^2$. *La condición necesaria y suficiente precisa para la inexistencia de líneas de tipo tiempo cerradas* (suponiendo que la variedad uniparamétrica de los espacios $\rho=$const. no sea cerrada) *es que la métrica en los espacios de densidad constante sea de tipo espacio*[10]. Esto es válido para las soluciones que satisfacen todas las condiciones enunciadas en § 1.

---

[10] Esta condición, asimismo, significa que en el límite que separa ambos casos, la velocidad lineal causada por la rotación deviene igual a c, si por tal velocidad lineal se entiende la velocidad de la materia relativa a las ortogonales a los espacios de densidad constante.

Para estas soluciones, asimismo, *la inexistencia de líneas de tipo tiempo cerradas es equivalente a la existencia de un «tiempo universal»*, donde por tiempo universal nos referimos a la asignación de un número real t a cada punto del espacio-tiempo, con la propiedad de que t siempre aumenta si uno se mueve a lo largo de una línea de tipo tiempo en su dirección positiva[11]. Si, además, cualesquiera dos 3-espacios de simultaneidad son equidistantes y la diferencia de t es su distancia, se lo puede llamar un *tiempo universal métrico*. Si los espacios de densidad constante son de tipo espacio, puede definirse un tiempo universal métrico tomando estos 3-espacios como espacios de simultaneidad. Evidentemente (aparte de transformaciones $\bar{t}=f(t)$), éste es el único tiempo universal invariante bajo el grupo de transformaciones de la solución.

4. Comportamiento de la velocidad angular en el curso de la expansión

Tanto si los postulados I-III se satisfacen como si no, el camino temporal de ω se describe mediante el siguiente teorema: *en un sistema de coordenadas en el que las líneas-x_4 son las líneas-universo de materia, $g_{44}=-1$ en todos los puntos, y además, $g_{i4}=0$ (para $i\neq 4$) sobre el eje X_4, se obtiene a lo largo de todo el eje X_4:*

$$(13)\qquad \omega^i(-g)^{1/2}=\omega^i h^{1/2}=\text{const.}\ (i=1,2,3).$$

La prueba puede darse en pocas líneas: es evidente que $v^4=1$, $v^i=0$ (para $i\neq 4$) en todos los puntos; por lo tanto, $v_i=g_{i4}$. Al introducir estos valores de v_i en (7), se obtiene sobre X_4:

$$(14)\qquad a_{4ik}=\frac{\partial g_{4k}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{4i}}{\partial x_k},\quad a_{123}=0.$$

Pero $\partial g_{4i}/\partial x_4=0$ (porque las líneas-x_4 son geodésicas y $g_{44}=-1$). De donde, por (14), $\partial a_{klm}/\partial x_4=0$ sobre X_4. De ahí que por (6) también $\partial(\omega^i(-g)^{1/2})/\partial x_4=0$ sobre X_4.

[11] Un vector tipo tiempo es positivo si está contenido en la misma mitad del cono de luz que el vector v.

La ecuación (13) significa dos cosas:

A) Que el vector ω (o, para ser más exactos, las líneas l_ω cuya tangente tiene en todos los puntos la dirección de ω) conecta permanentemente las mismas partículas entre sí.

B) Que el valor absoluto $|\omega|$ aumenta o disminuye en proporción a la contracción o expansión de la materia ortogonal a ω, donde esa contracción o expansión se mide por el área de la intersección de un cilindro espacial infinitesimal[4] alrededor de l_ω (que incluye permanentemente las mismas partículas) con una superficie ortogonal a l_ω.

Dado que en la prueba de (13) no se usó nada más que el hecho de que las líneas-universo de materia son geodésicas (y en particular no se usó la homogeneidad del espacio), (13), y por lo tanto A), B) también describen el comportamiento de la velocidad angular si las condensaciones se forman bajo la influencia de la gravitación[12]; es decir, $|\omega|$ bajo estas circunstancias aumenta según la misma ley que la de la mecánica newtoniana.

La dirección de ω, incluso en un universo homogéneo, no tiene por qué desplazarse paralelamente a sí misma a lo largo de las líneas-universo de materia. *La condición necesaria y suficiente para que se desplace paralelamente en un instante determinado es que coincida con uno de los ejes principales de la forma cuadrática de la expansión.* Pues si P y Q son dos partículas de un entorno conectadas por ω, entonces, sólo bajo la condición que acabamos de formular, la dirección PQ en el instante dado, se hallará en reposo relativamente al alcance de la inercia (para ver esto basta introducir el sistema inercial local definido en § 1 (véase nota 2) y argumentar entonces exactamente igual que en la física newtoniana). Sin embargo, como (por A) la dirección de ω coincide *permanentemente* con la dirección de PQ, la misma condición se aplica a la dirección de ω. No obstante, esta condición, en general, no se satisface (sólo se satisface siempre en el caso simétrico).

El hecho de que la dirección de ω no tiene por qué desplazarse paralelamente a sí misma puede ser la razón que

---

[12] Naturalmente, sólo en la medida en que la presión gaseosa y de radiación permanezcan lo bastante pequeñas como para que sean despreciables.

explique la distribución irregular de las direcciones de los ejes de rotación de las galaxias (la cual, a primera vista, parece contradecir una explicación de la rotación de las galaxias a partir de una rotación del universo). Pues si el eje de rotación del universo no se desplaza paralelamente, la dirección del momento angular de una galaxia dependerá del momento en que se formó.

5. Teoremas de existencia

Puede probarse que, *para cualquier valor de* λ *(incluyendo* 0*), existen* ∞^8 *soluciones rotacionales que satisfacen todas las condiciones enunciadas en* § 1. *Lo mismo vale si, además, se exige que exista un tiempo universal* (*o que no exista*). El valor de la velocidad angular es completamente arbitrario, incluso si ρ y el radio medio del universo (en el instante considerado) están dados. En particular, existen soluciones rotacionales con $\lambda = 0$ que difieren arbitrariamente poco de la solución espacialmente isótropa con $\lambda = 0$.

Así pues, surge el problema de distinguir, por medio de propiedades de simetría o simplicidad, determinadas soluciones dentro de la vasta variedad de soluciones. Por ejemplo, se puede tratar de exigir que el universo se expanda a partir de un punto y se contraiga hacia un punto.

6. Método de prueba

El método de prueba, por medio del cual se obtuvieron los resultados dados más arriba, está basado en el postulado I de § 1. Este postulado implica que todas las líneas-universo de materia (y todas las ortogonales a los espacios de densidad constante) son equivalentes entre sí. Es, por tanto, suficiente limitar la consideración a una de tales líneas-universo (o a una de tales ortogonales). Esto reduce el problema a un sistema de ecuaciones diferenciales *ordinarias*.

Además, este sistema de ecuaciones diferenciales puede derivarse de un principio hamiltoniano, es decir, es un problema de mecánica analítica, con un número finito de grados de

libertad. Las ecuaciones de la teoría de la relatividad, no obstante, asignan valores definidos a las integrales de la energía y el momento, de modo que el problema relativista es un poco más especial que el problema correspondiente de la mecánica analítica.

Por medio de las integrales del momento, el caso simétrico puede reducirse a un problema con tres grados de libertad (g_1, g_2, g_3), cuya función lagrangiana es como sigue:

$$\left\{\sum_{i<k} \frac{\dot{g}_i \dot{g}_k}{g_i g_k} + \frac{1}{g}\left[2\sum_i g_i^2 - \left(\sum_i g_i\right)^2\right] + \frac{V^2}{g_1(g_2-g_3)^2}\right\} g^{1/2} + 2\left(1+\frac{V^2}{g_1}\right)^{1/2}, \tag{15}$$

donde $g = g_1 g_2 g_3$ y V es una constante que determina la velocidad de rotación. El caso general puede reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales de octavo orden.

7. Soluciones rotacionales estacionarias

Puede sospecharse que las soluciones particulares deseadas (véase § 5 más arriba) tendrán una relación estrecha con las soluciones homogéneas estacionarias, y es interesante, por lo tanto, investigar éstas también. Por solución homogénea estacionaria entendemos una cuyo grupo, para dos puntos cualesquiera P, Q de todo el 4-espacio, contiene transformaciones que trasladan P sobre Q.

Todas estas soluciones pueden determinarse y expresarse mediante funciones elementales. Así se obtienen los resultados siguientes:

1. *No existen soluciones homogéneas estacionarias con* $\lambda = 0$.

2. *Existen soluciones homogéneas estacionarias en rotación, con un espacio finito, sin ninguna línea tipo tiempo cerrada y con* $\lambda > 0$; en particular, también soluciones tales que difieren arbitrariamente poco del universo estático de Einstein.

Sin embargo, las líneas-universo de materia de estas solucio-

nes no son equidistantes: la rotación relativa a la brújula de la inercia de partículas de materia en un entorno, una alrededor de la otra, no se da en círculos, sino en elipses (o, para ser más exactos, en elipses en rotación).

Introducción a:
Sobre una ampliación todavía no utilizada del punto de vista finitario

Ya desde el momento mismo en que probó la imposibilidad de llevar a cabo el programa de Hilbert, Gödel trató de ofrecer alguna salida a los formalistas, al menos en lo que respecta a la prueba de consistencia de la matemática clásica y, en especial, de la aritmética clásica. Hilbert había pretendido que dicha prueba se realizase por métodos finitarios. Pero los métodos finitarios en que pensaba Hilbert eran aritméticos y combinatorios elementales y, como tales, formalizables en los sistemas formales cuya consistencia se pretendía probar con ellos, por lo que dicha prueba resultaría imposible, por el teorema sobre la consistencia de Gödel. Ya en su artículo «Sobre sentencias formalmente indecidibles de *Principia Mathematica* y sistemas afines» Gödel comentaba que quizá fuera posible encontrar métodos de prueba finitarios en algún sentido, pero no formalizables en el sistema formal correspondiente.

En 1958 Gödel volvió a indicar la necesidad de ampliar el punto de vista finitario de Hilbert con principios de inferencia más abstractos, aunque también constructivos, si se quería lograr una prueba de consistencia de la aritmética clásica. Y esta vez Gödel ofreció una tal ampliación y, basada en ella, una posibilidad de probar la consistencia de la aritmética clásica.

Ya Gentzen había probado en 1936 la consistencia de la aritmética clásica mediante un razonamiento por inducción transfinita sobre todos los ordinales menores que ε_0, donde ε_0 es el límite de la sucesión ω, ω^{ω}, $\omega^{\omega^{\omega}}$, etc., donde ω es el conjunto de los números ordinales finitos (es decir, de los números naturales). ¿Hasta qué punto es una tal prueba intuitiva o aceptable desde un punto de vista finitario o constructivo?

Gödel ofreció en 1958 una prueba de consistencia de la aritmética intuicionista (y, de rebote, también de la aritmética clásica, pues ya en 1932 –en «sobre la teoría de números y la aritmética intuicionistas»– había mostrado la equivalencia de ambas). Esta prueba se basaba en eliminar los cuantificadores y las variables ligadas, pero en admitir objetos (funcionales) de tipos superiores y operaciones con esos objetos, que podían llevarse a cabo de un modo intuitivamente claro y que podían considerarse como una extensión del punto de vista finitario.

En concreto, Gödel ofrece un sistema formal T muy parecido a la aritmética recursiva primitiva, formado exclusivamente por ecuaciones no cuantificadas. La única diferencia sustancial estriba en que aquí las variables y functores no se refieren solamente a números naturales y funciones numéricas, sino a funcionales computables de cualquier tipo finito.

Gödel prueba que para cada fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ de la aritmética intuicionista puede encontrarse efectivamente otra fórmula φ' que tenga la forma $\exists y_1 \dots y_l \, \forall z_1 \dots z_m \, \psi(y_1 \dots y_l, z_1 \dots z_m, x_1 \dots x_n)$, donde ψ es una fórmula sin cuantificadores, y tal que si φ es deducible en la aritmética intuicionista, entonces $\psi(Q(x_1, \dots, x_n), z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n)$ es deducible en T, para una función Q definible en T, que a cada secuencia de argumentos asigna una secuencia de valores. Este hecho permite indicar a Gödel cómo probar la consistencia de la aritmética intuicionista. En efecto, si $\psi(Q(x_1, \dots, x_n), z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n)$ no es deducible en T –lo cual puede probarse por consideraciones computacionales en sentido amplio–, entonces tampoco φ es deducible en la aritmética intuicionista y, por tanto, ésta es consistente. Pero, puesto que la consistencia de la aritmética intuicionista es equivalente a la de la clásica, también esta última es consistente.

¿Qué valor puede darse a una tal prueba de consistencia? Un valor parecido al de la de Gentzen, que se basaba en la

inducción ordinal transfinita hasta ε_0. En efecto, como el mismo Gödel escribe, «el sistema T tiene la misma fuerza demostrativa que un sistema de teoría de números, en el que se admita inducción completa sobre todos los números ordinales $<\varepsilon_0$». De todos modos, para Gödel su proceder tiene la ventaja de una mayor intuitividad. Otros investigadores, como Tait, Hinata, Howard y Troelstra[0] han desarrollado posteriormente la teoría gödeliana de los funcionales recursivos primitivos de tipo finito.

El artículo apareció en 1958 bajo el título *Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes* (Sobre una ampliación todavía no utilizada del punto de vista finitario), en la revista *Dialectica*, núm. 12 (1958), págs. 280-287. Una traducción al inglés por W. Hodges y B. Watson ha aparecido en *Journal of Philosophical Logic*, 9 (1980), pp. 133-142.

Jesús Mosterín J. M.

[0] Véase W. W. Tait [1967]: *Intensional interpretations of funtionals of finite type*. S. Hinata [1967]: *Calculability of primitive recursive functionals of finite type*. W. A. Howard [1970]: *Assignement of ordinals to terms for primitive recursive functional of finite type*. A. S. Troeslstra [1977]: *Aspects of constructive mathematics*.

SOBRE UNA AMPLIACION TODAVIA NO UTILIZADA DEL PUNTO DE VISTA FINITARIO

P. Bernays ha indicado[1] en repetidas ocasiones que, en vista del hecho de la indemostrabilidad de la consistencia de un sistema formal con medios de prueba más reducidos que los del sistema mismo, es necesario –para probar la consistencia de la matemática clásica e incluso la de la teoría de números clásica– traspasar el marco de la matemática finitaria en el sentido de Hilbert. Puesto que la matemática finitaria se define como la matemática de la evidencia *intuitiva*[2], esto significa (como también fue explícitamente formulado por Bernays en *L'enseignement mathématique*, 34 (1935), págs. 62 y 69) que para probar la consistencia de la teoría de números necesitamos ciertos conceptos *abstractos*. Aquí hay que entender por conceptos abstractos (o no-intuitivos) aquellos que son esencialmente de segundo (o mayor) orden, es decir, que no contienen propiedades y relaciones de *objetos concretos* (por ejemplo, de combinaciones de signos), sino que se refieren a *construcciones del pensamiento* (por ejemplo, demostraciones, sentencias significativas, etc.) y donde

[1] Véase, por ejemplo, *Entretiens de Zürich* (edit. por F. Gonseth, 1941), págs. 144, 147; además: Hilbert-Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 2 (1939), § 5; y *Rev. Internat. Phil.*, núms. 27-28 (1954), fasc. 1-2, pág. 2.

[2] Véase la formulación de Hilbert en (1925): *Über das Unendliche*, págs. 171-173.

en las pruebas se utilizan intuiciones sobre estas últimas que no se desprenden de las propiedades combinatorias (espacio-temporales) de las combinaciones de signos que las representa, sino solamente de su *significado*.

Aunque carecemos de una prueba rigurosa de la constatación de Bernays, como no podía menos de ocurrir dada la falta de un concepto preciso de evidencia intuitiva y de evidencia abstracta, sin embargo apenas pueden caber dudas sobre su corrección, sobre todo desde que Gentzen probó que todas las recursiones sobre números ordinales $<\varepsilon_0$ son formalizables en la teoría de números. Pues la validez de la inferencia recursiva para ε_0 no puede en modo alguno hacerse inmediatamente intuitiva, como puede hacerse para ω^2, por ejemplo. Más precisamente esto significa que carecemos de una visión clara de las diferentes posibilidades estructurales que puede adoptar una sucesión descendente y por tanto carecemos también de un conocimiento intuitivo de la necesidad del acabamiento de cada tal sucesión. En especial mediante el tránsito paso a paso de números ordinales menores a mayores no podemos obtener tal conocimiento *intuitivo*, sino meramente un conocimiento abstracto con ayuda de conceptos de orden superior. Esto último se consigue mediante el concepto abstracto de la «alcanzabilidad»[3] definido en función de la demostrabilidad en cuanto a su contenido de la validez de un cierto modo de inferencia. En el marco de la matemática que nos resulta intuitiva tampoco es posible reducir la inferencia inductiva sobre un número ordinal suficientemente grande a una cadena de otras intuiciones. Por el contrario, cada intento de hacerlo conduce a inducciones de básicamente el mismo orden. No es posible decidir sin más si la necesidad de los conceptos abstractos está condicionada meramente por la imposibilidad práctica de representarse[4] intuitivamente los hechos

[3] Es cierto que W. Ackermann dice en *Mathematische Zeitschrift*, vol. 53, pág. 407, que «alcanzable» tiene un sentido intuitivo, si entendemos demostrabilidad como deducibilidad formal según ciertas reglas. Pero a esto puede replicarse que de ese hecho intuitivo sólo con ayuda de conceptos abstractos (o con ayuda de la inducción transfinita en la metamatemática) se sigue la validez de la inferencia por inducción transfinita para una propiedad dada. De todos modos el concepto de «alcanzable» puede ser reemplazado –por lo menos para inducciones hasta ε_0– por conceptos abstractos más débiles.

[4] Obsérvese que una caracterización deductivo-teórica adecuada de una

combinatoriamente demasiado complicados o si se debe a razones de principio. En el segundo caso deberá ser posible probar rigurosamente aquella necesidad, una vez precisados los correspondientes conceptos.

En todo caso la observación de Bernays nos enseña a distinguir dos componentes en la actitud finitaria, a saber, en primer lugar el elemento constructivo, que consiste en que sólo se nos permite hablar de objetos matemáticos en la medida en que podamos señalarlos o producirlos efectivamente mediante una construcción; y en segundo lugar el elemento específicamente finitista que, además de eso, exige que los objetos de los que se habla, con los que se realizan las construcciones y los que de ellas resultan, sean «intuitivos», es decir, en último término configuraciones espacio-temporales de elementos, cuya naturaleza, excepto en cuanto a igualdad y desigualdad, es irrelevante. (Por el contrario, en la lógica intuicionista esos objetos son sentencias significativas y demostraciones.)

Es de la segunda exigencia de la que hay que prescindir. Hasta ahora se ha tenido en cuenta este hecho al añadir partes de la teoría de los ordinales y de la lógica intuicionista a la matemática finitaria. En lo que sigue se muestra que para probar la consistencia de la teoría de números en vez de esos añadidos se puede utilizar el concepto de función computable de tipo finito sobre los números naturales y ciertos principios de construcción muy elementales para tales funciones. El concepto de «función computable de tipo *t*» se precisa del siguiente modo:

---

evidencia intuitiva *idealizada* mediante el olvido de ese límite contendrá modos de inferencia que no son intuitivos *para nosotros* y que muy bien podrían permitir una reducción de la inferencia inductiva a la un orden esencialmente menor. Otra posibilidad de extender el punto de vista finitario inicial, para la que vale lo mismo, consiste en incluir en la matemática finitaria los conceptos abstractos que no se refieren más que a conceptos y objetos finitarios y además lo hacen de un modo combinatoriamente finitario, y en iterar ese proceso. Tales conceptos son, por ejemplo, los que están envueltos en la reflexión sobre el contenido de formalismos finitarios ya construidos. Un formalismo correspondiente a esta idea fue desarrollado por G. Kreisel. Véase su conferencia ante el Congreso internacional de matemáticos en Edinburgh, 1958. Obsérvese que en este tipo de extensión del finitarismo el elemento abstracto aparece de una forma esencialmente más débil que en el que luego consideraremos o en la lógica intuicionista.

1. Las funciones computables de tipo 0 son los números naturales. 2. Si los conceptos de «función computable de tipo t_0», «función computable de tipo t_1», ..., «función computable de tipo t_k» (donde $k \geqslant 1$) ya están definidos, entonces una función computable de tipo $(t_0, t_1, ..., t_k)$ se define como una operación siempre ejecutable (y como tal constructivamente reconocible), que a cada k-tuplo de funciones computables de los tipos t_1, t_2, ..., t_k asigna una función computable de tipo t_0. Este concepto[5] ha de ser considerado como inmediatamente comprensible[6], suponiendo que los conceptos de «función computable de tipo t_i» ($i=0, 1, ..., k$) ya estén entendidos. Si consideramos el tipo t como variable, obtenemos el concepto de función computable de tipo t, necesario para la prueba de consistencia.

Como axiomas evidentes, además de los axiomas de identidad (también para funciones[7]), de los axiomas 3.° y 4° de Peano y de la regla de sustitución para variables libres, no necesitamos más que aquellos que permiten, en primer lugar, definir funciones por igualación con un término construido con variables y constantes previamente definidas y por inducción simple sobre una variable numérica, y, en segundo lugar, aplicar la inferencia por inducción completa sobre una variable numérica. Esto significa que los axiomas de este sistema (al que vamos a llamar

---

[5] Se puede dudar de que tengamos una representación suficientemente clara del contenido de este concepto, pero no de que los axiomas que luego indicaremos valgan para él. La misma aparentemente paradójica situación se da también respecto al concepto de prueba correcta en cuanto a su contenido en que se basa la lógica intuicionista. Como muestran las consideraciones siguientes y la teoría intuicionistamente interpretada de las funciones recursivas, estos dos conceptos son hasta cierto punto intercambiables como conceptos primitivos. Hay que tener en cuenta que si el concepto de función computable no debe contener implícitamente el concepto de prueba, entonces la ejecutabilidad de las operaciones debe ser inmediatamente evidente a partir de la cadena de las definiciones, como ocurre con todas las funciones del sistema T que más adelante presentamos.

[6] Como es bien sabido, A. M. Turing ha dado una definición del concepto de una función computable de primer orden con ayuda del concepto de una máquina computadora. Pero si ese concepto no hubiera sido comprensible ya antes, la pregunta por la adecuación de la definición de Turing carecería de sentido.

[7] La identidad entre funciones ha de ser entendida como intensional ó por definición.

T) son formalmente casi los mismos[8] que los de la teoría recursiva primitiva de números, con la sola diferencia de que las variables (excepto aquellas a las que se aplica la inducción), así como también las constantes definidas, pueden tener un tipo finito cualquiera sobre los números naturales. Para mayor simplicidad añadimos en lo que sigue el cálculo conectivo bivalente, aplicado a ecuaciones, aunque las funciones veritativas pueden ser reemplazadas por funciones numéricas. No admitimos variables ligadas. El sistema T tiene la misma fuerza demostrativa que un sistema de teoría recursiva de números, en el que se admita inducción completa sobre todos los números ordinales $<\varepsilon_0$ (en la representación usual).

La reducción de la consistencia de la teoría clásica de números a la del sistema T se realiza con ayuda de la siguiente interpretación de la teoría de números de Heyting (a la que la clásica es reducible)[9]:

A cada fórmula φ de la teoría de números intuicionista[10] (la secuencia de cuyas variables libres se designa mediante x) hacemos corresponder una fórmula φ' que tenga la forma $\exists y\ \forall z\ \alpha(y, z, x)$, donde y y z son secuencias finitas de variables de tipos cualesquiera y $\alpha(y, z, x)$ una fórmula sin cuantificadores en la que no hay más variables que las que aparecen en x, y, z. Las variables de las secuencias x, y, z, que también pueden ser vacías, son todas ellas distintas entre sí. Mediante xy designamos la secuencia compuesta por x e y en ese orden.

Además utilizamos las siguientes notaciones:

1. v, w son secuencias finitas de variables de tipos cualesquiera; s, t son variables numéricas; u es una secuencia de variables numéricas.

2. V es una secuencia de variables, cuyo número y tipo

---

[8] En la definición por igualación con un término se da una diferencia en la medida en que una función P de tipo superior puede ser también definida $(P(x_1 x_2, \cdots, x_n))\ (y_1 y_2, \cdots, y_m) = E$. Pero esta diferencia desaparece si sustituimos las funciones poliarias por funciones monarias del modo indicado por Church.

[9] Véase Gödel [1932c].

[10] La teoría de números debe formalizarse de tal modo, que en ella no aparezcan variables sentenciales o predicativas. Los axiomas del cálculo conectivo deben entenderse como esquemas de todas sus posibles sustituciones.

están determinados por la exigencia de que cada una de ellas pueda ser aplicada a y como secuencia de argumentos y de que la secuencia de los valores así obtenidos (que designamos mediante $V(y)$) coincida con v respecto al número y tipo de sus miembros.

3. Análogamente, el número y tipos de los miembros de la secuencia de variables Y (o Z, o $\bar{Z}$, respectivamente) están determinados por la secuencia de argumentos s (o yw, o y, respectivamente) y por la secuencia y (o z, o z, respectivamente), con cuyos tipos han de coincidir los de la secuencia de sus valores.

Las funciones 0-arias con valores del tipo τ se identifican con objetos del tipo τ; las secuencias de variables de un solo miembro, con variables.

La asignación de φ' a φ se produce por inducción por el número k de conectores lógicos incluidos en φ. (Las condiciones que han de tenerse en cuenta para la elección de símbolos para las variables ligadas y la justificación heurística de las definiciones se ofrecen después de las fórmulas.)

I. Para $k=0$, sea $\varphi' = \varphi$

II. Estén ya definidas $\varphi' = \exists y \forall z \alpha(y, z, x)$ y
$\gamma' = \exists v \forall w \beta(v, w, u)$.

Entonces *por definición:*

1. $(\varphi \Delta \gamma)' = \exists yv\ \forall zw(\alpha(y, z, x) \Delta \beta(v, w, u))$
2. $(\varphi \nabla \gamma)' = \exists yvt\ \forall zw(((t=0 \Delta \alpha(y, z, x)) \nabla (t=1 \Delta \beta(v, w, u)))$
3. $(\forall s\ \varphi)' = \exists Y \forall sz\ \alpha(Y(s), z, x)$
4. $(\exists s\ \varphi)' = \exists sy\ \forall z\ \alpha(y, z, x)$
5. $(\varphi \supset \gamma)' = \exists VZ\ \forall yw\ (\alpha(y, Z(yw), x) \supset \beta(V(y), w, u))$
6. $(-\varphi)' = \exists \bar{Z}\ \forall y - \alpha(y, \bar{Z}(y), x)$

s es una variable numérica cualquiera. Antes de aplicar las reglas 1-5 deben ser cambiadas en caso necesario las variables de las fórmulas φ' y γ' de tal modo, que todas ellas sean distintas

entre sí y de las variables de las secuencias x, u, así como de s. Además, las variables de las secuencias t Y, V, Z, $\bar{Z}$ introducidas por aplicación de las reglas 2, 3, 5, 6 deben ser elegidas de tal modo que sean distintas entre sí y de las variables que ya aparezcan en las fórmulas correspondientes.

Obsérvese que 6 se sigue de 5, si $-p$ se define como $p \supset 0=1$. A 5 se llega identificando (para los casos especiales que se den) la sentencia $\exists x\psi(x) \supset \exists y\chi(y)$ (o $\forall y\chi(y) \supset \forall x\psi(x)$, respectivamente) con la existencia de funciones computables, definidas para todas las secuencias de argumentos del tipo de la secuencia de variables x, que a cada ejemplo del antecedente asignan un ejemplo del consiguiente y a cada contraejemplo del consiguiente asignan un contraejemplo del antecedente.

Desde luego no afirmamos que las definiciones 1-6 reproduzcan el sentido de las partículas lógicas introducidas por Brouwer y Heyting. En qué medida aquéllas puedan reemplazar a éstas es algo que merece ser investigado. Fácilmente se prueba que si φ *es deducible en el sistema Z de Heyting de teoría de números, entonces podemos definir funciones Q en T, para las cuales* $\alpha(Q(x), z, x)$ *es deducible en T.* Pues es fácil de comprobar que esta afirmación vale para los axiomas de Z y que su corrección se transmite de las premisas a la conclusión en las aplicaciones de las reglas de inferencia de Z.

La verificación resulta especialmente simple, si adoptamos el siguiente sistema axiomático de la lógica intuicionista[11]:

Axiomas: Taut, Add, Perm, los axiomas duales a éstos para Δ, $0=1 \supset p$ ($-p$ se define mediante $p \supset 0=1$).

Reglas de inferencia: Modus ponens, regla de sustitución para variables numéricas libres, Syll (con dos premisas), Sum, Exp, Imp, las reglas para añadir y suprimir un cuantificador universal en el consiguiente o un cuantificador existencial en el antecedente de un condicional ya deducido.

Para la prueba de consistencia de la teoría de números

---

[11] Respecto a estas notaciones, véase *Principia Mathematica*, 2.ª ed., pág. XII. Las mismas notaciones se emplean también para las reglas de inferencia correspondientes a las fórmulas.

clásica pueden suprimirse los axiomas y reglas de inferencia que contengan ∀ o ∃. Respecto a todas las reglas que siguen a Sum resulta que la sentencia que ha de ser deducida en T esencialmente es la misma que la ya deducida en virtud de las premisas.

Está claro que, partiendo de la misma idea básica se pueden construir sistemas mucho más fuertes que T, por ejemplo, mediante la admisión de tipos transfinitos o de los modos de inferencia utilizados por Brouwer para la prueba del «teorema del abanico»[12].

---

[12] Véase A. Heyting [1956]: *Intuitionism*, pág. 42.

Introducción a:
Posdata a Spector [1962]

Desde los años cuarenta Gödel había estado trabajando en el tema de los funcionales computables de orden finito, de los que se sirvió en su artículo de 1958 «Über eine noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes» (Sobre una ampliación todavía no utilizada del punto de vista finitario) para dar una prueba en cierto modo constructiva de la consistencia de la aritmética intuicionista y, por tanto (en vista de Gödel [1933e]), también de la clásica. Gödel pensaba que esos funcionales constituían una ampliación natural de los métodos finitarios excesivamente estrechos propugnados en el programa de Hilbert. Posteriormente Spector extendió la interpretación gödeliana de la aritmética sobre el dominio de los funcionales al análisis, aunque la presunta constructibilidad de esa interpretación de Spector haya sido bastante discutida. Entre tanto, Spector mismo murió y su artículo, «Provably recursive functionals of analysis: A consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics» (Funcionales demostrablemente recursivos del análisis: Una prueba de consistencia del análisis mediante una extensión de principios formulados en la actual matemática intuicionista), apareció póstumamente en 1962 en J. Dekker (ed.): *Recursive Function Theory*, Proceedings of symposia in pure mathematics, vol. 5, American Mathematical

Society, Providence, págs. 1-27. Gödel, que apreciaba mucho a Spector y que revisó su artículo, le añadió una posdata (en la pág. 27), que describía las circunstancias en las cuales se había escrito el artículo y señalaba la influencia de G. Kreisel.

J. M.

POSDATA A SPECTOR [1962]

Este notable artículo (Spector [1962]) fue escrito por Clifford Spector durante su estancia en el Institute for Advanced Study en 1960-61 con el disfrute de una beca de la Office of Naval Research. Las discusiones que P. Bernays y yo tuvimos con Spector (véase la nota 1)[1] tuvieron lugar después de que el resultado principal (contenido en §10 del artículo) hubiera sido establecido. Sin embargo, debe mencionarse que, cuando Spector estableció este resultado, tuvo mucho contacto con Kreisel. La intención expresa de Spector era dar a Kreisel una buena parte de mérito por su aportación. Originalmente se planeó una publicación conjunta de Spector y Kreisel. Pero este plan se cambió porque Spector se encargó de la elaboración y porque la versión de la prueba que iba a ser publicada se debía a Spector. Por aquel entonces también Spector estaba trabajando solo en una extensión del resultado en la dirección de constructividad más estricta y que esperaba incluir en su artículo.

[1] La nota 1 de Spector [1962] fue escrita por Kreisel, como todas las notas del artículo, y en ella se afirma: «por el párrafo 3 de la introducción previa y por conversaciones con Spector sé que él valoraba mucho sus discusiones con P. Bernays y K. Gödel sobre el tema del presente artículo».

Introducción a:
Suplemento a la segunda edición [de «¿Qué es el problema del continuo de Cantor?»]

Cuando P. Benacerraf y H. Putnam solicitaron permiso para incluir en su antología [1964] el artículo «¿Qué es el problema del continuo de Cantor?», Gödel no sólo se lo dio, sino que en 1963 escribió un suplemento y, a última hora, incluso una posdata al suplemento. En el suplemento Gödel da cuenta de algunos avances realizados en teoría de conjuntos desde la publicación original del artículo, en 1947, hasta 1963. Además, y sobre todo, replica a los críticos de su filosofía de las matemáticas, reafirmando vigorosamente un platonismo extremo, que equipara la intuición matemática a la percepción sensible, y la cuestión de la existencia de las entidades matemáticas a la de la existencia del mundo externo. En especial se opone a la opinión de que, si se probase la independencia de la hipótesis del continuo respecto de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos, entonces el problema de la verdad de la hipótesis del continuo se disolvería, como pasó con el problema de la verdad del postulado de las paralelas, una vez probada su independencia de los otros axiomas de la geometría. Lo mismo que puede hacerse geometría euklídea y no euklídea, podría hacerse teoría de conjuntos continuista y no continuista. Según Gödel, las nociones de la teoría de conjuntos poseen un significado intuitivo que trasciende las formulaciones axiomáticas, por lo que hipótesis como la del continuo seguirían

siendo verdaderas o falsas en función de ese significado, aunque resultaran ser independientes de los axiomas usados. Si se probase su independencia, ello indicaría que nuestras axiomatizaciones de la teoría de conjuntos han de ser completadas con nuevos axiomas verdaderos, que decidan cuestiones tales como la del continuo. Para buscar y elegir esos axiomas sólo tenemos dos guías: nuestra intuición matemática y el estudio de las consecuencias (sobre todo en teoría de números) de las diversas propuestas.

Apenas acabada la redacción de este suplemento, recibió Gödel la noticia de que Paul Cohen había logrado probar la independencia de la hipótesis del continuo respecto de los otros axiomas de la teoría de conjuntos (incluido el de elección), con lo cual la discusión anterior, planteada en tono hipotético, adquiría nuevo e inesperado dramatismo. Rápidamente añadió Gödel una posdata para dar cuenta del descubrimiento de Cohen.

El suplemento apareció bajo el título *Supplement to the second edition* (Suplemento a la segunda edición), con el *Postscript* (posdata) incluido, en las págs. 269-273 de la antología de P. Benacerraf y H. Putnam: *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.

J. M.

SUPLEMENTO A LA SEGUNDA EDICION

Desde la publicación de este artículo se han obtenido numerosos nuevos resultados; quisiera mencionar los que son de especial interés para las anteriores discusiones.

1. A. Hajnal ha probado[34] que si de los axiomas de la teoría de conjuntos se dedujese $2^{\aleph_0} \neq \aleph_2$, entonces también se deduciría $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Este sorprendente resultado podría facilitar en gran medida la solución del problema del continuo si la hipótesis del continuo fuese demostrable a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos, lo que, sin embargo, probablemente no es el caso.

2. En la nueva edición del libro de W. Sierpinski[35] se pueden encontrar ciertas nuevas consecuencias de la hipótesis de Cantor e ideas equivalentes a ella. En la primera edición se probó que la hipótesis del continuo es equivalente a la idea de que el plano euclídeo es la unión de una infinidad numerable de «curvas generalizadas» (donde una curva generalizada es un conjunto de puntos definible mediante una ecuación $y=f(x)$ en algún sistema de coordenadas cartesianas). En la segunda

[34] Véase Hajnal [1956].

[35] Véase la nota 6.

edición se ha señalado[36] que se puede probar que el plano euclídeo es la unión de un número menor que la cardinalidad del continuo de curvas generalizadas bajo la suposición mucho más débil de que la cardinalidad del continuo no es un número inaccesible. Una prueba del teorema inverso proporcionaría cierta verosimilitud a la hipótesis de que $2^{\aleph_0}$ es el mínimo número inaccesible mayor que $\aleph_0$. Hay que tomar grandes precauciones, sin embargo, respecto a esta inferencia, pues en este caso la apariencia paradójica (como con las «curvas» de Peano) se debe (al menos en parte) a una transferencia de nuestra intuición geométrica de las curvas a algo que sólo tiene algunas de las características de las curvas. Obsérvese que nada de esto está involucrado en las consecuencias antiintuitivas de la hipótesis del continuo mencionadas en la pág. 353.

3. C. Kuratowski ha formulado una versión más fuerte de la hipótesis del continuo[37] cuya consistencia se sigue de la prueba de consistencia mencionada en la sección 4. Ha obtenido también varias consecuencias de esta nueva hipótesis.

4. En los últimos años se han obtenido resultados muy interesantes sobre los axiomas de infinitud (véanse las notas 16 y 20).

Se ha sugerido[38], en oposición al punto de vista defendido en la sección 4, que en el caso de que el problema del continuo de Cantor resultase ser indecidible a partir de los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos, perdería significado la cuestión de su verdad exactamente del mismo modo como la pregunta por la verdad del quinto postulado de Euclides carece de sentido para los matemáticos desde la prueba de consistencia de la geometría no euclídea. En cuanto a esto me gustaría señalar que la situación en la teoría de conjuntos es muy diferente de la de la geometría tanto desde el punto de vista matemático como desde el epistemológico.

---

[36] Véase la paigina 207 de la segunda edición, o Sierpinski [1951], Kuratowski y Sikorski han obtenido resultados relacionados en Kuratowski y Sikorski [1951], 15 y 18.

[37] Véase Kuratowski [1948].

[38] Véase Errera [1952].

En el caso del axioma de la existencia de números inaccesibles, por ejemplo (que se puede probar que es indecidible a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos de von Neumann-Bernays, en el supuesto de que sea consistente con ellos) hay, matemáticamente, una notable asimetría entre el sistema que lo afirme y el que lo niegue[39].

El último sistema (pero no el primero) tiene un modelo que se puede definir y del que se puede probar que es también un modelo del sistema original (no extendido). Esto significa que el primero es una extensión mucho más fuerte que el segundo. Un hecho muy relacionado es que la afirmación (pero no la negación) del axioma implica nuevos teoremas sobre números enteros (casos particulares de los cuales pueden verificarse por computación). De este modo el criterio de validez explicado en la página 348 se satisface, hasta cierto punto, en el caso de la afirmación pero no en el de la negación. Resumiendo, sólo la afirmación proporciona una extensión «fructífera», mientras que la negación es estéril fuera de su limitado dominio. También se puede probar que la hipótesis del continuo de Cantor es estéril para la teoría numérica y que es válida en un modelo construible en el sistema original, mientras que a ciertas otras suposiciones sobre la cardinalidad del continuo quizá no les ocurra esto. Por otro lado, ninguna de estas asimetrías es aplicable al quinto postulado de Euclides. Para ser más precisos, tanto su afirmación como su negación son extensiones en el sentido débil.

En lo que respecta a la cuestión epistemológica, debe decirse que una cuestión pierde su significado a causa de una prueba de indecidibilidad sólo cuando el sistema de axiomas en consideración se interpreta como un sistema formal; esto es, si se deja indeterminado el significado de los signos primitivos. En geometría, por ejemplo, la cuestión de si el quinto postulado de Euclides es verdadero conserva su significado si se toman los signos primitivos en un sentido definido, es decir, refiriéndose al comportamiento de cuerpos rígidos, rayos de luz, etc. La situación es parecida en la teoría de conjuntos, siendo la única

---

[39] La misma asimetría aparece también en los niveles más bajos de la teoría de conjuntos, donde la consistencia de los axiomas está menos sometida a la duda de los escépticos.

diferencia que en geometría el significado que hoy usualmente se acepta se refiere a la física y no a la intuición matemática y que, por tanto, la decisión cae fuera de las matemáticas. Por otro lado, los objetos de la teoría de conjuntos transfinita, entendidos al modo explicado en la página y en la nota 14, está claro que no pertenecen al mundo físico e incluso que su conexión indirecta con la experiencia es muy remota (debido principalmente al hecho de que los conceptos de la teoría de conjuntos tienen un reducido papel en las teorías físicas de hoy).

Pero, a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que futuras percepciones sensibles concuerden con ellas y, además, a creer que cuestiones no decidibles por el momento tengan significado y puedan ser decididas en el futuro. Las paradojas de la teoría de conjuntos difícilmente son más preocupantes para la matemática que los engaños de los sentidos para la física. Ya se indicó (págs. 348-350) que pueden darse perfectamente nuevas intuiciones matemáticas que conduzcan a una decisión de problemas tales como la hipótesis del continuo de Cantor.

Debería observarse que la intuición matemática no tiene que ser concebida como una facultad que proporcione un conocimiento *inmediato* de los objetos que le conciernen. Parece más bien que, como en el caso de la experiencia física, *formamos* también nuestros conceptos de estos objetos a partir de algo más que *es* inmediatamente dado. Sólo que este algo más *no* es aquí, o no principalmente, la sensación. Que además de las sensaciones hay algo real e inmediatamente dado se sigue (independientemente de las matemáticas) del hecho de que incluso nuestros conceptos referentes a los objetos físicos contienen constituyentes cualitativamente diferentes de las sensaciones o meras combinaciones de sensaciones, por ejemplo, el concepto mismo del objeto, mientras que, por otro lado, mediante nuestro pensamiento no podemos crear ningún elemento cualitativamente

nuevo, sino sólo reproducir y combinar los que están ya dados. Lo «dado» que subyace a las matemáticas está, evidentemente, muy relacionado con los elementos abstractos contenidos en nuestros conceptos empíricos[40]. De esto no se sigue, sin embargo, que los datos de este segundo tipo sean algo puramente subjetivo, porque no pueden asociarse con acciones de ciertas cosas exteriores a nuestros órganos sensibles, como Kant afirmaba. Pueden representar más bien un aspecto de realidad objetiva, pero, en oposición a las sensaciones, su presencia en nosotros puede deberse a otro tipo de relación entre la realidad y nosotros mismos.

La cuestión de la existencia objetiva de los objetos de la intuición matemática (que, incidentalmente, es una réplica exacta de la cuestión de la existencia objetiva del mundo exterior) no es, sin embargo, decisiva para el problema que aquí discutimos. El mero hecho psicológico de la existencia de una intuición que es lo bastante clara como para producir los axiomas de la teoría de conjuntos y una serie abierta de extensiones de éstos basta para dar sentido a la cuestión de la verdad o falsedad de ideas tales como la hipótesis del continuo de Cantor. Lo que, sin embargo, quizá justifica más que nada la aceptación de este criterio de verdad en la teoría de conjuntos es el hecho de que recurrir a la intuición matemática no es necesario únicamente para obtener respuestas unívocas a preguntas de la teoría de conjuntos transfinita, sino también para resolver problemas de la teoría finitaria de números[41] (del tipo de la conjetura de Goldbach)[42], la significatividad y univocidad de cuyos conceptos apenas se puede poner en duda. Esto se sigue del hecho de que en cada sistema axiomático hay infinitas sentencias indecidibles de este tipo.

---

[40] Obsérvese que hay una estrecha relación entre el concepto de conjunto explicado en la nota 14 y las categorías del entendimiento puro en el sentido de Kant. A saber, la función de ambas es la «síntesis», es decir, la generación de unidades a partir de multiplicidades (por ejemplo, en Kant el concepto de *un* objeto surge de sus variados aspectos).

[41] A menos que uno tenga bastante con decisiones inductivas (probables), tales como verificar el teorema hasta números muy grandes, o procedimientos inductivos más indirectos (véanse las págs. 350, 360).

[42] Es decir, ideas universales sobre números enteros que puedan decidirse en cada caso particular.

Se señaló anteriormente (pág. 350) que, junto a la intuición matemática, puede haber otro criterio (aunque sólo probable) de la verdad de los axiomas matemáticos, a saber, su fecundidad en las matemáticas e incluso, se podría añadir, quizá también en la física. Aunque este criterio pueda llegar a ser decisivo en el futuro, no puede todavía aplicarse, sin embargo, específicamente a los axiomas de la teoría de conjuntos (tales como los que se refieren a los grandes cardinales) porque se sabe muy poco sobre sus consecuencias en otros campos. El caso más simple de aplicación del criterio que discutimos surge cuando algún axioma de la teoría de conjuntos tiene consecuencias numéricas verificables por computación hasta cualquier número natural dado. A pesar de todo, lo que hoy día sabemos no nos permite todavía proporcionar un apoyo razonablemente suficiente a ninguno de los axiomas en cuestión de la teoría de conjuntos.

Posdata

Poco después de redactar este artículo la cuestión de si la hipótesis del continuo de Cantor es demostrable a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos de von Neumann-Bernays (incluyendo el axioma de elección) fue decidida mediante la respuesta negativa dada por Paul J. Cohen. Un esbozo de la prueba aparecerá dentro de poco en *Proccedings of the National Academy of Sciences.* Resulta entonces que para una gran cantidad de $\aleph_\tau$ la igualdad $2^{\aleph_0} = \aleph_\tau$ es consistente y es una extensión en el sentido débil (esto es, no implica ningún nuevo teorema de la teoría de números). Está aún abierta la cuestión de si para algún concepto apropiado de definición «estándar» existen $\aleph_\tau$ definibles no excluidos por el teorema de König (véase la pág. 343) para los cuales esto no sea así (naturalmente, debe suponerse que la existencia de los $\aleph\tau$ en cuestión es demostrable o ha sido postulada).

Introducción a: *Sobre una extensión de la matemática finitaria que todavía no ha sido usada*

En 1958 había aparecido en la revista *Dialectica* el artículo de Gödel «Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes» (Sobre una ampliación todavía no utilizada del punto de vista finitario), en el que se introducían los funcionales (o funciones) computables de tipo finito y se mostraba cómo usarlos para probar la consistencia de la aritmética. Los funcionales (o funciones) computables de tipo finito forman un conjunto cerrado respecto a las operaciones de definición recursiva primitiva de funcionales, expresadas en una teoría sin cuantificadores *T*, lo que les da un cierto aire constructivo. Gödel pensaba que los procedimientos finitarios propugnados por Hilbert en su programa metamatemático no podían ir más allá de la aritmética y, por tanto, no podían servir para probar su consistencia. Sin embargo, Gödel prueba que la aritmética intuicionista (y, por tanto –en vista de Gödel [1933e]–, la clásica) puede ser interpretada en *T*, lo cual constituye una cierta prueba de consistencia para la aritmética.

Gödel pensaba que el insuficiente eco obtenido por su propuesta se debía en parte al hecho de que su artículo [1958] estaba escrito en alemán, por lo que se propuso traducirlo él mismo al inglés. Su traducción se prolongó durante varios años y Gödel introdujo en ella tantas revisiones, añadidos y notas

nuevas, que el resultado final era en gran parte un texto nuevo. Ese texto debería haber aparecido en la misma revista *Dialectica* bajo el título «On an extension of finitary mathematics which has not yet been used» (Sobre una extensión de la matemática finitaria que todavía no ha sido usada). Las galeradas correspondientes al texto compuesto se encontraron entre los papeles póstumos de Gödel, pero de hecho el número de la revista en que tenía que haber aparecido nunca llegó a publicarse. El texto original aparecerá en el volumen II de Kurt Gödel: *Collected Works.* Aquí presentamos su traducción española.

J. M.

SOBRE UNA EXTENSION DE LA MATEMATICA FINITARIA QUE TODAVIA NO HA SIDO USADA[a]

Resumen

P. Bernays ha señalado que es necesario ampliar el punto de vista finitario de Hilbert incluso con el solo propósito de probar la consistencia de la teoría clásica de números. Ha sugerido que se admitan ciertos conceptos abstractos además de los conceptos combinatorios que hacen referencia a signos. Los conceptos abstractos que hasta el momento se han usado con este objetivo son los de la teoría constructiva de ordinales y los de la lógica intuicionista. Aquí se muestra que en su lugar puede usarse un cierto concepto de función computable de tipo simple finito sobre los números naturales, no siendo necesarios otros procedimientos de construcción de tales funciones que recursión primitiva respecto a una variable numérica y definición de una función por una igualdad con un término que contiene sólo variables y/o funciones previamente introducidas comenzando con la función $+1$.

---

[a] El presente artículo no es una traducción literal del original publicado en alemán en *Dialectica* (1958). Al revisar la traducción de Leo F. Boron he reformulado muchos pasajes. Pero el significado no ha cambiado sustancialmente en ningún lugar. Ciertas imprecisiones menores han sido corregidas y se han añadido una serie de notas, a las que refieren las letras *a-n*. Quisiera expresar mi agradecimiento al profesor Dana Scott por supervisar la impresión de este artículo mientras yo estaba enfermo y al profesor Paul Bernays por leer las pruebas de imprenta y llamar mi atención sobre ciertos descuidos del manuscrito.

P. Bernays ha señalado[1] en varias ocasiones que, en vista del hecho de que la consistencia de un sistema formal no puede demostrarse mediante ningún procedimiento deductivo disponible en el propio sistema, es necesario traspasar el marco de la matemática finitaria en el sentido de Hilbert para demostrar la consistencia de la matemática clásica e incluso la de la teoría clásica de números. Como la matemática finitaria se define[2] como la matemática de la *intuición concreta*, esto parece implicar que para la prueba de consistencia de la teoría de números[c] son necesarios *conceptos abstractos*. P. Bernays, en su artículo de 1965, pág. 69, sugirió explícitamente una extensión del finitismo mediante estos conceptos. En este contexto hay que entender por conceptos abstractos conceptos que son esencialmente de segundo

[1] Véase: Bernays, en Gonseth [1941], pág. 144, 147, 150, 152; Hilbert y Bernays [1939], pág. 347-349, 357-360; Bernays [1954], pág. 9. Véase también Bernays [1935], pág. 62, 69.

[2] Véase la explicación de Hilbert [1925], pág. 170-173[b].

[b] «*Intuición concreta*» y «*concretamente intuitivo*» se usan como traducción de «Anschauung» y «anschaulich». Los términos simples «*concreto*» e «*intuitivo*» se usan también en este sentido en este artículo. A lo que Hilbert se refería con «Anschauung» es sustancialmente a la intuición espacio-temporal de Kant, pero limitada a configuraciones de un número finito de objetos discretos. Obsérvese que la insistencia de Hilbert en el conocimiento concreto es lo que hace que la matemática finitaria sea tan sorprendentemente débil y excluya muchas cosas que son tan indiscutiblemente evidentes para todo el mundo como la teoría finitaria de números. Por ejemplo, aunque toda definición recursiva es finitaria, el principio general de definición por recursión primitiva no es una proposición finitaria, pues contiene el concepto abstracto de función. No hay nada en el término «finitario» que sugiera una restricción a conocimiento concreto. Sólo la especial interpretación de Hilbert introduce esta restricción.

[c] En las pruebas de consistencia (véase: 1. Gentzen [1936], pág. 555, 558; 2. Lorenzen [1951], pág. 99, en particular su «inducción de segundo tipo»; 3. Schütte [1954], pág. 31; 4. Kreisel [1965], pág. 137 [1967], pág. 246 y [1968], pág. 351, 12; 5. Takeuti [1957], [1960], [1967]) los conceptos que han sido usados son sobre todo *accesibilidad* y otros íntimamente relacionados (combinados con lógica intuicionista). Estos conceptos dan la impresión engañosa de estar basados en la *intuición concreta* de ciertos *procedimientos infinitos*, tales como «contar más allá de ω» o «pasar revista» a todos los ordinales menores que un ordinal α. Poseemos una tal intuición, pero no alcanza muy lejos en la serie de los ordinales, ciertamente no más lejos que el finitismo. Para hacer *fructífero* el concepto de accesibilidad siempre son necesarias *concepciones abstractas*, por ejemplo, intuiciones sobre un número infinito de intuiciones en la definición general de Gentzen, que es algo distinta de la antes dada (véase Gentzen [1936], pág. 555, línea 7).

orden o de orden aún mayor, es decir, que no tienen como contenido propiedades o relaciones de objetos concretos (como combinaciones de signos), sino más bien *estructuras de pensamiento* o *contenidos de pensamiento* (por ejemplo, demostraciones, proposiciones con significado, etc.) y en las demostraciones de proposiciones sobre estos objetos mentales se necesitan intuiciones que no se derivan de una reflexión sobre las propiedades combinatorias (espacio-temporales) de los signos que los representan, sino de una reflexión sobre los *significados* involucrados[e].

Debido a la ausencia de una definición precisa de evidencia concreta o abstracta, no hay hoy ninguna prueba rigurosa de la insuficiencia de la matemática finitaria (incluso para la prueba de consistencia de la teoría de números). Sin embargo, este sorprendente hecho se ha constatado con toda claridad a través del examen de la inducción hasta ε_0 usada en la prueba de consistencia de Gentzen de la teoría de números. La situación puede describirse en rasgos generales como sigue: se podría demostrar finitariamente la recursión hasta ε_0 si otro tanto ocurriera con la consistencia de la teoría de números. Por otro lado, es cierto que la validez de esta recursión no puede hacerse *inmediatamente* evidente, mientras que esto sí es posible, por ejemplo, en el caso de ω^2. Es decir, no se puede abarcar de una mirada las diversas posibilidades estructurales que hay para secuencias decrecientes y no hay, por tanto, conocimiento concreto *inmediato* del fin de

---

Usando el concepto de secuencias de elección libre en vez de «accesibilidad»[d] puede obtenerse una aproximación mejor al finitismo de Hilbert.

[d] Se trata realmente de un principio abstracto sobre esquemas de ramificación que, sin embargo, Brouwer y Hayting formularon y probaron sólo para el caso de que sus elementos sean números naturales (aunque no está claro que este hecho se use de modo esencial en la prueba). C. Spector en Spector [1962] ha mostrado que el principio abstracto implica la consistencia del análisis clásico, mientras que el principio de Brouwer sólo proporciona la consistencia de un cierto subsistema de éste. Desgraciadamente, sin embargo, no se conoce ninguna prueba constructiva satisfactoria para ninguno de estos dos principios (excepto que, de acuerdo con Kreisel [1965], pág. 143, puede probarse que el principio más débil es relativamente consistente con los otros axiomas aceptados del intuicionismo). Fue G. Kreisel quien sugirió por primera vez usar este principio para pruebas de consistencia.

Quizás la extensión más prometedora del sistema T sea la obtenida al introducir *funciones computables de orden superior de ordinales constructivos.*

[e] Un ejemplo es el concepto «p implica q» en el sentido de: «De una prueba convincente de p puede obtenerse una prueba convincente de q».

cada secuencia de este tipo. Pero además de este conocimiento *concreto* (en el sentido de Hilbert) tampoco puede obtenerse mediante una transición paso a paso de números ordinales menores a mayores, pues los pasos concretamente evidentes, como $\alpha \rightarrow \alpha^2$, son tan pequeños que deberían repetirse ε_0 veces para llegar a ε_0. Lo mismo vale de cadenas de otras inferencias concretamente evidentes que uno puede intentar usar, como, por ejemplo, la ω-regla de Hilbert en la medida en que es concretamente evidente. Lo único que puede conseguirse es un conocimiento *abstracto* basado en conceptos de orden superior, por ejemplo en «accesibilidad». Este concepto puede definirse como la condición de que la validez de la inducción es constructivamente demostrable para el ordinal en cuestión[3]. No se puede decidir sin más si la necesidad de conceptos abstractos para la prueba de la inducción a partir de un cierto punto en la serie de los ordinales constructivos se debe únicamente a la imposibilidad de captar intuitivamente las complicadas (aunque sólo *finitamente* complicadas) relaciones combinatorias involucradas[4] o más bien surge por alguna razón esencial.

[3] W. Ackermann, en Ackermann [1951], pág. 407, dice que «accesible» tiene un significado concreto si se entiende demostrabilidad como deducibilidad formal según ciertas reglas. Sin embargo, debe observarse que de este hecho concreto se sigue la validez de la regla de inducción transfinita aplicada a una propiedad dada únicamente con ayuda de conceptos abstractos o con ayuda de inducción transfinita en la metamatemática. Pero es cierto que el concepto de «accesible» puede reemplazarse, al menos para inducción hasta ε_0, por conceptos abstractos más débiles (véase Hilbert y Bernays [1939], pág. 363 y ss.); véase la nota *c*.

[4] Obsérvese que una caracterización deductivo-teórica adecuada de la intuición concreta, en el caso de que esta facultad se *idealice* abstrayendo la limitación práctica, incluirá procedimientos de inducción que para nosotros no son concretamente intuitivos y que muy bien podrían proporcionar una prueba de la inferencia inductiva para ε_0 u ordinales superiores. Otra posibilidad de extender el punto de vista finitario original, y para la que valen los mismos comentarios, consiste en considerar finitario cualquier argumento abstracto que sólo remita (de un modo finitario y combinatorio) al contenido de formalismos finitarios construidos previamente, y en iterar esta remisión transfinitamente, usando sólo ordinales construidos en los estadios previos de este proceso. En el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en 1958 en Edinburgo, G. Kreisel presentó un formalismo basado en esta idea (Kreisel [1960])[f]. Obsérvese que si el finitismo se extiende en este sentido, el elemento abstracto aparece en una forma *esencialmente más débil* que en cualquier otra extensión mencionada en el presente artículo.

[f] Una versión incuestionable se presenta en Kreisel [1965], pág. 168-173, 177-

En el segundo caso debe ser posible ofrecer una prueba rigurosa de esa necesidad tras haber precisado los conceptos en cuestión.

En cualquier caso, la observación de Bernays en la nota a pie de página número 1 de su artículo de 1935, nos enseña a distinguir dos componentes en el concepto de matemática finitaria, a saber: primero el elemento *constructivo*, que consiste en admitir referencias a objetos o hechos matemáticos únicamente en la medida en que puedan exhibirse u obtenerse por construcción o demostración; en segundo lugar, el elemento específicamente *finitista*, que requiere además que los objetos y hechos considerados estén dados en la intuición matemática concreta. En lo que a los objetos respecta, esto significa que deben ser combinaciones espacio-temporales finitas de elementos cuya naturaleza es irrelevante excepto en cuanto a igualdad y diferencia. (En contraste con esto, los objetos en lógica intuicionista son proposiciones con significado y demostraciones).

La segunda exigencia debe ser eliminada. Hasta ahora este hecho se ha tenido en cuenta al añadir a la matemática finitaria partes de lógica intuicionista y de la teoría constructiva de los números ordinales. En lo que sigue se mostrará que para la prueba de consistencia de la teoría de números se puede usar, en lugar de esto, cierto concepto de *función computable de tipo finito sobre los números naturales* y ciertos axiomas y principios de construcción para estas funciones de carácter muy elemental.

El concepto de «función computable de tipo t» se define como sigue: 1. Las funciones computables de tipo 0 son los números naturales. 2. Si los conceptos «función computable de tipo t_0», «función computable de tipo t_1», ..., «función computable de tipo

178. El teorema 3.43 de la página 172 de la obra indicada establece que ε_0 es el límite de este proceso. Kreisel quiere concluir de ello que ε_0 es el límite exacto de la intuición concreta idealizada. Pero su argumento tendría que haberse elaborado más para ser completamente concluyente. Obsérvese que la jerarquía de Kreisel puede extenderse más allá de ε_0 considerando como un paso cualquier secuencia de pasos que previamente se haya mostrado que es admisible (por ejemplo, cualquier secuencia de ε_0 pasos). De este modo proporciona un medio para hacer constructivo en un sentido mucho más estricto el concepto de accesibilidad (véase la nota *c*) resolviendo el concepto impredicativo general de prueba intuicionista en niveles construidos de pruebas formales.

t_k» (donde $k \geqslant 1$) han sido ya definidos, entonces una función computable de tipo $(t_0, t_1, ..., t_k)$ se define como un procedimiento matemático bien definido que puede aplicarse a cualquier k-tupla de funciones computables de tipos $t_1, t_2, ..., t_k$ y proporciona una función computable de tipo t_0 como resultado; y además este hecho general debe ser constructivamente evidente. Debe aceptarse sin posterior explicación[5] que la expresión «procedimiento matemático bien definido» tiene un significado claro. Las funciones que aparecen en esta jerarquía se llaman «funciones computables de tipo finito sobre los números naturales»[6].

---

[5] Es bien sabido que A. M. Turing ha dado una definición elaborada del concepto de función de números naturales *mecánicamente* computable. Es muy cierto que esta definición no fue superflua. No obstante, si el término «mecánicamente computable» no hubiera tenido un significado claro, aunque inanalizado, la cuestión de si la definición de Turing es adecuada no habría tenido sentido y, sin embargo, tiene sin duda ninguna una respuesta positiva[g].

[g] Se ve fácilmente que las funciones de Turing (identificando las funciones en tanto que argumentos o valores de funciones de tipo superior con los números de codificación de sus máquinas) y ciertas subcolecciones de éstas también satisfacen los axiomas y reglas del sistema T que se da posteriormente. Respecto al significado de este hecho, véase la nota h.

[6] Se puede dudar de que, sobre la base de la definición dada, tengamos una idea suficientemente clara del contenido de este concepto, pero no de que los axiomas del sistema T que posteriormente daremos sean válidos para él. La misma situación aparentemente paradójica se da también respecto al concepto de demostración intuicionísticamente correcta, que es la base de la lógica intuicionista en la interpretación de Heyting. Como mostrará la discusión siguiente, estos dos conceptos pueden intercambiarse en la construcción de la lógica intuicionista dentro de la teoría de números. Naturalmente, si este reemplazo ha de tener alguna significación epistemológica, el concepto empleado de función computable y la verificación de que estas funciones satisfacen los axiomas de T no debe involucrar implícitamente ni lógica intuicionista ni el concepto de demostración usado por Heyting. Esta condición la satisface el concepto de «función computable de tipo finito» dado en el texto y en la nota h.

[h] Una elaboración de esta idea conduciría a lo siguiente:

1. Un concepto de demostración *más estricto*, que puede llamarse «demostración deductiva», y que se define, a grandes rasgos, por el hecho de que, salvo por ciertas suplementaciones triviales, la cadena de definiciones de los conceptos que aparecen en el teorema junto con ciertos axiomas sobre los términos primitivos constituye por sí misma una demostración, es decir, una cadena ininterrumpida de evidencias inmediatas. En aplicaciones especiales (como, por ejemplo, en nuestro caso) este concepto de demostración puede precisarse especificando las suplementaciones, los axiomas y las evidencias que se van a usar.

Obsérvese que, en este contexto, una definición va a considerarse como un

En lo que afecta a axiomas y reglas de inferencia para este concepto, sólo se necesitan los siguientes: (1) axiomas para el cálculo proposicional bivalente aplicado a ecuaciones entre

---

teorema que enuncia existencia y unicidad de un objeto que satisface ciertas condiciones y que, en nuestro caso, sería conveniente que formara parte de la definición un enunciado relativo al carácter de tipo de la función definida.

2. Un concepto de «función computable de tipo *t*» más especial, obtenido reemplazando en la definición antes dada el concepto de «constructivamente evidente o demostrable» (que aparece en ella tanto explícitamente como implícitamente a través de implicaciones de la forma: *si* $x,y,...$ tienen ciertos tipos, *entonces* ...) por «reductivamente demostrable». Obsérvese que las implicaciones que aparecen también pueden ser interpretadas como funciones veritativas, pues «reductivamente demostrable» es una propiedad decidible.

3. El hecho de que si los axiomas, reglas y conceptos primitivos de *T* (obsérvese que, por ejemplo, todo tipo es un concepto primitivo de *T*) se reemplazan, en virtud de las definiciones 1,2 recién dadas, por conceptos e intuiciones realmente primitivos (o, al menos, por algo más cercano a los primitivos reales) obteniendo así un sistema *T'*, sólo es necesario usar en las proposiciones y demostraciones de *T'* el concepto incomparablemente más estricto (en comparación con el de Heyting) de demostración *reductiva* y que, además, como estas demostraciones están unívocamente determinadas por sus teoremas, se pueden evitar las cuantificaciones sobre «cualquier demostración». Obsérvese que *no* se pretende que las pruebas en *T' sean* reductivas. Esto sólo ocurre en ciertos casos, en particular en las demostraciones de los axiomas de *T* y de los casos individuales de las reglas de *T* (de modo no trivial para las de los grupos (4) y (5) y trivial para las restantes). Lo que se sostiene es sólo que ningún *concepto* de demostración excepto el de demostración reductiva *aparece* en las proposiciones y demostraciones de *T'* excepto, claro está, en la medida de algún teorema *P* signifique en intuicionismo: se ha dado una *demostración* de *P*. Si *T* se interpreta en términos de funciones de Turing (véase la nota *g*) debería ser aplicable esencialmente el mismo método para evitar el uso de la lógica de Heyting o del concepto general de demostración.

El punto 3 muestra que la interpretación de la lógica intuicionista en términos de funciones computables no presupone de ningún modo la lógica de Heyting y que, además, es constructiva y evidente en mayor grado que la de Heyting. Pues precisamente la eliminación de generalidades tan vastas como «cualquier demostración» es lo que proporciona mayor evidencia y constructividad.

El mayor grado de constructividad aparece también en otros hechos, por ejemplo, en que el principio de Markov $-\forall x\varphi(x) \supset \exists x - \varphi(x)$ (véase Kleene [1960], nota a pie de la página 157) es trivialmente demostrable para cualquier φ recursiva primitiva y, de modo más general, para cualquier propiedad decidible φ de objetos cualesquiera x. Incidentalmente, esto da un interés a esta interpretación de la lógica intuicionista (tanto en términos de funciones computables de tipos superiores como en términos de funciones de Turing) incluso si se presupone la lógica de Heyting.

términos del mismo tipo, (2) los axiomas de igualdad[7], es decir, $x = x$ y $x = y \supset t(x) = t(y)$ para variables x,y y términos t de cualquier tipo, (3) el tercer y el cuarto axioma de Peano, es decir, $x+1 \neq 0$ y $x+1 = y+1 \supset x = y$, (4) la regla de sustitución de variables libres por términos del mismo tipo (en el sistema no aparecen variables ligadas), (5) reglas que permiten la definición de una función mediante una igualdad con un término construido a partir de variables y funciones previamente definidas o por recursión primitiva respecto a una variable numérica, (6) la versión usual de la inferencia de inducción completa respecto a una variable numérica. Obsérvese que los axiomas y reglas de este sistema, que llamaremos T[i], son formalmente casi las mismas que las de la

[7] La igualdad de funciones debe entenderse como *igualdad intensional.* Ello significa que las dos funciones tienen el mismo procedimiento de computación, es decir, (por nuestra definición de «función computable») que son idénticas. Eso es siempre decidible para dos funciones *dadas,* con lo cual se justifica la aplicación del cálculo proposicional bivalente.

[i] Para una descripción precisa de T debería añadirse lo siguiente:

Los signos primitivos de T son: 0, +1, =, *variables* y *constantes definidas* de cualquier tipo finito, «*aplicación*» de funciones a argumentos de tipos adecuados (denotado con .(.,.)) y *conectivas proposicionales.* Los términos se construyen únicamente con constantes, variables y aplicación. Las *fórmulas con significado* son las funciones veritativas de ecuaciones entre términos de igual tipo.

Respecto a los axiomas de T, obsérvese lo siguiente:

1. La versión de *inducción completa* usada en la prueba de consistencia es ésta:

$$\alpha(0,x),\ \alpha(s,F(s,x)) \supset \alpha(s+1,x) \vdash \alpha(s,x)$$

donde x es una secuencia finita de variables de tipos arbitrarios y F una secuencia de funciones previamente definidas y de los tipos adecuados.

2. Para las demostraciones de que los axiomas 1 y 4 de H y la regla de deducción 6 de H valen en la interpretación antes definida, se necesita el siguiente principio de *definición disyuntiva:*

Puede definirse una función f estipulando

$$\alpha \supset f(x) = t_1,\ \ -\alpha \supset f(x) = t_2$$

donde t_1,t_2 son términos y α es una función veritativa de ecuaciones entre *términos numéricos* que contienen sólo funciones previamente definidas y no más variables que las de la secuencia x.

3. Tanto la versión de la inducción completa dada en 1 como las definiciones disyuntivas mencionadas en 2 pueden deducirse en T, las últimas por medio de funciones disyuntivas H definidas recursivamente como sigue:

$$H(0,f,g) = f, \qquad H(n+1,f,g) = g.$$

teoría primitiva recursiva de números, salvo que las constantes y variables (excepto a las que se aplica inducción) pueden tener cualquier tipo finito sobre los números naturales[8]. El sistema T tiene la misma potencia deductiva que un sistema de teoría recursiva de números en el que se permita la inducción completa para todos los números ordinales menores que ε_0.

La reducción de la consistencia de la teoría clásica de números a la del sistema T se logra por medio de la siguiente interpretación de la teoría intuicionista de números, a la que la teoría clásica de números es reducible[9].

Se asocia a cada fórmula φ del sistema H de la teoría intuicionista de números[10] una fórmula φ' de la forma $\exists y\ \forall z\ \alpha(y,z,x)$, donde x es la secuencia de variables libres de φ, donde y,z

Sin embargo, parece mejor formular primero axiomas a partir de los cuales es inmediata la prueba de consistencia y después reducirlos a otros más simples: El hecho de que evitemos la igualdad extensional, que es un concepto incomparablemente más complicado que la identidad lógica, aumenta de modo considerable la simplicidad de la prueba de consistencia.

4. Si no se presta atención a la complejidad de la prueba de consistencia, puede suprimirse de T todo el cálculo proposicional. En efecto, 1. aplicado a ecuaciones numéricas puede recuperarse mediante ciertos ingenios puramente aritméticos y 2., aplicado a ecuaciones de tipo superior, puede ser omitido si (*a*) el segundo axioma de igualdad (grupo (2)) se formula como regla de inferencia (que, dicho sea de paso, sólo se usa para sustituir uno por otro el definiens y el definiendum) y (b) se introduce una regla disyuntiva de inferencia que dice que si α se sigue tanto de $t=0$ como de $N(t)=0$ (donde N se define por $N(0)=1$, $N(x+1)=0$) mediante los otros axiomas y reglas, con excepción de la regla de sustitución para variables de t, entonces puede afirmarse α.

5. Es un hecho curioso que el grupo de axiomas (3) sea superfluo debido a la definibilidad recursiva de una función δ por $\delta(0)=0$, $\delta(x+1)=x$ y debido también a la definibilidad de $-p$ por $p \supset 1=0$. En efecto, se sigue inmediatamente que: $x+1=y+1 \supset \delta(x+1)=\delta(y+1) \supset x=y$ y que $x+1=0 \supset \delta(x+1)=\delta(0) \supset x=0 \supset 1=0$; pero, por otro lado, $-1=0$, por definición de $-$.

[8] La otra única diferencia está en el hecho de que una función P de tipo superior también puede ser definida por una ecuación de términos de la forma $[P(x_1,x_2, ..., x_n)]\ (y_1,y_2, ..., y_m)=t$, donde t es un término que no contiene más variables que $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m$. Se trata de una combinación de dos «abstracciones», es decir, de dos aplicaciones del operador λ. Formalmente, esta diferencia desaparece si las funciones de varios argumentos se reemplazan por funciones de un argumento con el método de A. Church.

[9] Véase Gödel [1933e].

[10] Se supone que H es un sistema que no contiene variables proposicionales ni funcionales, sino únicamente *variables numéricas*. Los axiomas y reglas de

son secuencias finitas de variables de tipos finitos y donde $\alpha(y,z,x)$ es una fórmula de T que contiene exactamente las variables que aparecen en x,y,z. Las variables de las secuencias x,y,z (que también pueden ser vacías) son siempre distintas entre sí y distintas de las de las otras dos restantes secuencias. Denotamos con xy la secuencia compuesta con x e y en este orden[k].

Además, en las fórmulas 1-6 que se dan más adelante se utiliza la siguiente notación:

1. v,w son secuencias finitas de variables que pueden ser de cualquier tipo; s,t son variables numéricas; u es una secuencia finita de variables numéricas.

2. V es una secuencia finita de variables cuyo número y tipos quedan determinados por el hecho de que cada una de ellas puede aplicarse a y como secuencia de argumentos y que la secuencia de términos así obtenida (que denotamos con $V(y)$) coincide con la secuencia v en lo que atañe a número y tipos de sus miembros.

3. La secuencia de variables Y (o Z, o $\bar{Z}$, respectivamente) queda determinada del mismo modo, en lo que atañe al número y tipos de sus miembros, por la secuencia s (o yw, o y, respectivamente) y por la secuencia y (o z, o z, respectivamente).

---

deducción de la lógica deben considerarse como esquemas respecto a todas las posibles sustituciones de las variables proposicionales[j] por fórmulas del sistema.

[j] Para una descripción completa del sistema H que se usa en este artículo debería añadirse lo siguiente: las *funciones teórico-numéricos* sè definen sólo por recursión primitiva y por el procedimiento de establecer que los valores de una función son iguales a los de un término compuesto de variables y funciones previamente introducidas: las *fórmulas* son lo que se obtiene a partir de ecuaciones entre términos por aplicación (iterada) de conectores proposicionales y cuantificadores. No se usan «*Sequenzen*» en el sentido de Gentzen ni el *descriptor* ι_x. La *inducción completa* se formula como regla de inferencia. Los *axiomas de igualdad* son: $x=x$ y $x=y \supset t(x)=t(y)$ para cualquier término $t(x)$. Además de los axiomas mencionados aquí y en la nota 10, sólo se presuponen los *axiomas tercero y cuarto de Peano*. Evidentemente, los sistemas T y H se solapan.

[k] Se ruega al lector que de aquí en adelante preste atención al hecho de que las letras y las fórmulas que aparecen en las discusiones siguientes *no son* combinaciones de signos de T o H sino que las *denotan*; análogamente, «$\exists x$» y «$x(y)$» denotan *operaciones* que han de ser realizadas con combinaciones de signos y que dan como resultado otra de estas cominaciones. Esta relación de denotación puede precisarse con facilidad. Obsérvese que, en particular, en expresiones como «$\alpha(r,s,t)$» los paréntesis denotan la *operación* de *sustitución*, es decir, «$\alpha(r,s,t)$» debe considerarse como una abreviación de «$\mathrm{S}^{rst}_{yzx}\alpha$». Así $\alpha(y,z,x)=\alpha$.

Las secuencias de variables de un solo término se identifican con las variables. Si x es la secuencia vacía, entonces $\exists x\alpha = \forall x\alpha = \alpha$ por definición.

La asignación de φ' a φ se define por inducción sobre el número k de operadores lógicos que aparecen en φ. Las precauciones que deben tomarse en la elección de los signos para las variables ligadas y los motivos heurísticos de la cláusula 5 se indican tras las siguientes fórmulas:

I. Para $k=0$ sea $\varphi' = \varphi$.

II. Supóngase que

$$\varphi' = \exists y \forall z \alpha(y,z,x)$$

y que

$$\psi' = \exists v \forall w \beta(v,w,u)$$

ya han sido definidas; entonces, *por definición*, ponemos:

1. $(\varphi \Delta \psi)' = \exists yv \forall zw(\alpha(y,z,x) \Delta \beta(v,w,u))$
2. $(\varphi \nabla \psi)' = \exists yvt \forall zw((t=0 \Delta \alpha(y,z,x)) \nabla (t=1 \Delta \beta(v,w,u)))$
3. $(\forall s\varphi)' = \exists Y \forall sz\alpha(Y(s),z,x)$
4. $(\exists s\varphi)' = \exists sy \forall z\alpha(y,z,x)$

donde s es una variable numérica contenida en x.

5. $(\varphi \supset \psi)' = \exists VZ \forall yw(\alpha(y,Z(y,w),x) \supset \beta(V(y),w,u))$
6. $(-\varphi)' = \exists \bar{Z} \forall y - \alpha(y,\bar{Z}(y),x)$

Antes de usar las reglas 1-6 deben cambiarse las variables ligadas de las fórmulas φ' y ψ', si ello es preciso, de modo que todas sean distintas entre sí y diferentes de las variables de las secuencias x,u. Además, las variables ligadas de las secuencias $t,Y,V,Z,\bar{Z}$ que han sido introducidas por aplicación de las reglas 2,3,5,6 deben escogerse de modo que sean distintas entre sí y diferentes de las variables que aparecen en las fórmulas en cuestión.

La parte derecha de 5 se obtiene transformando paso a paso la fórmula $(\varphi' \supset \psi')$ de acuerdo con la regla de que las proposiciones de la forma $(\exists x\varphi \supset \exists y\psi)$ (o $(\forall y\psi \supset \forall x\varphi)$, respectivamente), en las que x,y pueden ser secuencias de variables de tipos cualesquie-

ra, pueden reemplazarse por proposiciones que afirman que existen funciones computables que asignan a cada ejemplo del antecedente (o a cada contraejemplo del consiguiente, respectivamente) un ejemplo del consiguiente (o un contraejemplo del antecedente, respectivamente), teniendo en cuenta que $(-\theta \supset -\chi) \equiv (\chi \supset \theta)$[l].

Naturalmente, no se pretende que las definiciones 1-6 expresen el significado de las partículas lógicas introducidas por Brouwer y Heyting. La cuestión de en qué medida pueden reemplazarlas exige una mayor investigación. Se muestra fácilmente que *si φ es demostrable en H, entonces la proposición φ' es constructivamente demostrable en T; para ser más preciso, si $\varphi' = \exists y \forall z \alpha(y,z,x)$, entonces puede definirse en T una secuencia Q (posiblemente vacía) de constantes funcionales, para lo que $\alpha(Q(x),z,x)$ es demostrable en T.* La prueba consiste en verificar que la afirmación vale para los axiomas de H y que si vale para las premisas de una regla de inferencia de H, también vale para la conclusión.

La verificación resulta bastante más simple y directa si se usa el siguiente sistema de axiomas de la lógica intuicionista:

Axiomas: (1) $p \supset (p \Delta p)$, (2) $(p \Delta q) \supset p$, (3) $(p \Delta q) \supset (q \Delta p)$, (4), (5), (6), los axiomas duales para ∇, (7) $0=1 \supset p$[m]. La negación se define por $-p = p \supset 0=1$.

Reglas de deducción: (1) Modus ponens, (2) sustitución de variables libres por términos, (3) $p \supset q,\ q \supset r \vdash p \supset r$, (4) $(p \Delta q) \supset r \vdash p \supset (q \supset r)$ y viceversa, (5) $p \supset q \vdash p \supset \forall x q$ y viceversa, supuesto que x no aparece libre en p, (6) $p \supset r,\ q \supset r \vdash (p \nabla q) \supset r$, (7) $p \supset q \vdash \exists x p \supset q$ y viceversa, supuesto que x no aparece libre en q.

[l] La complejidad de la definición de $(\varphi \nabla \psi)'$ es necesaria para poder asegurar la decidibilidad de ∇ y, con ello, la validez de la inferencia

$$(p \supset r)\Delta(q \supset r) \vdash (p \nabla q) \supset r.$$

Si φ, ψ no tienen cuantificadores, $(\varphi \nabla \psi)'$ también puede definirse del mismo modo que $(\varphi \Delta \psi)'$. Ello tiene como consecuencia que $\varphi' = \varphi$ para fórmulas φ sin cuantificadores.

[m] El axioma 7 puede omitirse sin que peligre la interpretabilidad de la teoría de números clásica en la intuicionista (véase Johansson [1936]). $0=1 \supset -p$ se sigue de la definición de $-$ y de los otros axiomas y reglas.

Para las reglas de deducción 4, 5 y 7, resulta que la proposición a demostrar en T es esencialmente la misma que ya se supone demostrada para las premisas[n]. Los axiomas y reglas de inferencia que contienen $\forall$ y $\exists$ pueden omitirse para la prueba de consistencia de la teoría clásica de números.

Es claro que a partir de las mismas ideas básicas se pueden construir sistemas mucho más potentes que T, por ejemplo, admitiendo tipos transfinitos o los métodos de deducción usados por Brouwer para la demostración del «teorema del abanico»[11].

---

[n] Obsérvese además lo siguiente: la prueba de la afirmación es trivial para todos los axiomas de H y para la regla de deducción 2. Para las reglas de deducción 1 y 3 ello se sigue con facilidad del hecho de que lo que la fórmula $\alpha(Q(x),z,x)$ (correspondiente a $(p \supset q)'$) dice es precisamente *que de funciones Q para p' pueden derivarse funciones Q para q' y cómo puede efectuarse esto.* En lo que respecta a la inducción completa, obsérvese que la conclusión de esta inferencia particularizada al número natural n se obtiene de las premisas por n aplicaciones de sustitución y modus ponens.

Obsérvese también que el teorema de la deducción puede demostrarse fácilmente para la interpretación $'$. Además, como Spector observó (Spector [1962], pág. 10), el sistema T ampliado con lógica intuicionista con cuantificadores para funciones de cualquier tipo (es decir, su sistema $\Sigma_2 - \{F\}$) puede interpretarse en T de exactamente la misma manera que la teoría intuicionista de números. La prueba se desarrolla en detalle en §9, páginas 12-15, del artículo de Spector.

[11] Véase Heyting [1956], pág. 42 y la nota *d*.

Introducción a: *Otra versión del primer teorema de indecidibilidad*

Gödel había planeado añadir a su nueva versión de [1958], es decir, a [1972] «On an extention of finitary mathematics which has not yet been used», tres observaciones sobre los resultados de indecidibilidad. Dos de ellas ya han aparecido previamente, a saber, la nota añadida por Gödel a la traducción inglesa en van Heijenoort [1967] de [1932b] «Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit» (que en esta edición se encuentra en las páginas 000 y 000) y la nota de Gödel en Wang [1974] a su posdata a la reimpresión en Davis [1965] de [1934] *On undecidable propositions of formal mathematical systems* (que en esta edición se encuentra en las páginas 000 y 000). La tercera observación, titulada «Another version of the first undecidability theorem» (Otra versión del primer teorema de indecidibilidad), estaba destinada a aparecer en un número de la revista *Dialectica* que nunca llegó a publicarse, por lo que permanece inédita. Su texto original será publicado en el volumen II de Kurt Gödel: *Collected Works*. Aquí presentamos su traducción española.

En 1742 planteó Goldbach a Euler la pregunta de si cada número par $\geqslant 4$ es igual a la suma de dos números primos. Para los primeros de la serie está claro que ello es así: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=7+3$, $12=7+5$, $14=11+3$, $16=11+5$, ... Sin embargo, la pregunta aún no ha encontrado respuesta y el

correspondiente problema (probar la hipótesis afirmativa en general o encontrar un contraejemplo) –que ocupa el lugar 8.º en la famosa lista de 23 problemas de Hilbert– sigue sin solución. Otro problema planteado por Goldbach en 1742 es la cuestión de si cada número impar $\geqslant 9$ es igual a la suma de tres números primos. Ello se cumple obviamente para los primeros miembros de la serie: $9=3+3+3$, $11=3+3+5$, $13=3+3+7$, $15=3+5+7$, $17=3+7+7$, ... Pero el problema general sigue sin solución. Estos problemas de Goldbach y otros de complejidad comparable pueden ser planteados en unas pocas páginas. Sin embargo, no sabemos si tienen solución (si son decidibles) a partir de los principios actualmente admitidos en la matemática y que pueden reducirse a unos pocos axiomas de la teoría de conjuntos.

En su observación, Gödel pone en relación la complejidad de un problema (medida por el número de bytes necesarios para formularlo) con la complejidad de la teoría usada en su solución (medida por el número de bytes necesarios para expresar sus axiomas y definiciones). Muchos problemas son demasiado complejos para las simples teorías con que tratamos de resolverlos, por lo que en el futuro tendremos que añadir a nuestras teorías cada vez más axiomas de un grado de complejidad cada vez mayor. Una teoría sólo puede solucionar los problemas de un grado de complejidad menor o igual al de la propia teoría. Dada una teoría, siempre habrá problemas más complejos que ella y así indecidibles en función de ella. Este enfoque de la cuestión muestra un indudable interés por el tema de la complejidad computacional, que por aquel entonces empezaba a ser seriamente estudiado.

J. M.

OTRA VERSION DEL PRIMER TEOREMA DE INDECIDIBILIDAD

La situación puede caracterizarse con el siguiente teorema: para resolver todos los problemas de tipo Goldbach y de un cierto grado de complicación k, se necesita un sistema de axiomas cuyo grado de complicación, salvo correcciones menores, es $\geqslant k$ (donde el grado de complicación se mide por el número de signos precisos para formular el problema (o el sistema de axiomas) incluyendo, claro está, los signos que aparecen en las definiciones de los términos no primitivos que se usan). Ahora bien, toda la matemática de hoy en día puede derivarse de un puñado de axiomas bastante simples y que involucran muy pocos términos primitivos. Por tanto, incluso en el caso de que sólo los problemas que puedan formularse en unas pocas páginas vayan a ser resolubles, los pocos y simples axiomas que se usan hoy día tendrán que ser suplementados por un gran número de nuevos axiomas o por axiomas de gran complicación. Cabe dudar de que puedan existir axiomas evidentes en tan gran número (o de complejidad tan grande). y, por tanto, el teorema mencionado podría tomarse como una indicación de la existencia de cuestiones indecidibles para la mente humana. Pero en contra de esta interpretación está el hecho de que *existen* series inexploradas de axiomas que son analíticos, en el sentido de que sólo explicitan el contenido de los conceptos que aparecen en ellos, como, por

ejemplo, los axiomas de infinitud en teoría de conjuntos, axiomas que afirman la existencia de conjuntos de mayor y mayor cardinalidad o de más y más alto tipo transfinito y que sólo explicitan el contenido del concepto general de conjunto. Estos principios muestran que durante el desarrollo de las matemáticas aparecen cada vez más axiomas (y cada vez más complicados). En efecto, para entender los axiomas de infinitud es preciso haber desarrollado previamente la teoría de conjuntos hasta un considerable nivel.

Introducción a: *Declaración sobre el análisis no-estándar*

Los fundadores del cálculo diferencial –en especial Leibniz– habían basado su desarrollo en ideas intuitivas acerca de cantidades infinitamente pequeñas, los infinitesimales, pero ni ellos ni sus continuadores habían sido capaces de precisar adecuadamente tales nociones, que conservaron su oscuridad originaria y acabaron por ser desechadas en favor de los métodos de la «epsilóntica» introducidos en el siglo XIX. Sin embargo, una inesperada rehabilitación de los infinitesimales ha tenido lugar en nuestro tiempo, gracias al ingenioso uso hecho por Abraham Robinson del teorema de compacidad para la construcción de modelos no-estándar de la teoría de los números reales.

El descubridor explícito de los modelos no-estándar de la aritmética de los números naturales fue Skolem, en su artículo de 1933 recensionado por Gödel. En 1949 Henkin utilizó modelos no-estándar de cualquier teoría de primer orden para probar la suficiencia del cálculo deductivo. Y en 1960 A. Robinson tuvo la ocurrencia de utilizar los procedimientos de la teoría de modelos para construir modelos no-estándar (extensiones elementales) de la teoría (de primer orden) de los números reales, en los que, además de los números reales normales, hay infinitesimales,

menores que cualquier número real. Esto ha dado lugar al desarrollo del análisis no-estándar a partir de esa fecha.

En marzo de 1973 Abraham Robinson dio una charla sobre el análisis no-estándar en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Durante el coloquio subsiguiente Gödel hizo una declaración, que fue luego literalmente recogida en el prólogo a la segunda edición (1974) del libro de A. Robinson *Non-standard Analysis*. La declaración de Gödel parece excesivamente entusiasta, pero testimonia del apasionado interés con que incluso en sus últimos años seguía los nuevos desarrollos de la lógica.

J.M.

DECLARACION SOBRE EL ANALISIS NO-ESTANDAR

Me gustaría señalar un hecho que me parece muy importante, aunque no haya sido explícitamente mencionado por el profesor Robinson, a saber, que el análisis no-estándar simplifica frecuentemente las pruebas no sólo de teoremas elementales, sino también de resultados profundos. Por ejemplo, eso ocurre con la prueba de la existencia de subespacios invariantes para operadores compactos, dejando de lado el progreso en el resultado; y ocurre en otros casos aún en mayor medida. Esta situación debiera impedir la errónea y extendida consideración del análisis no-estándar como una especie de extravagancia o moda de los lógicos matemáticos. Nada más alejado de la verdad. Más bien hay buenas razones para creer que el análisis no-estándar, en una versión o en otra, será el análisis del futuro.

Una razón es la simplificación ya mencionada de las pruebas, pues la simplificación facilita el descubrimiento. Otra razón, todavía más convincente, es la siguiente: la aritmética empieza con los números naturales y procede mediante la ampliación sucesiva del sistema numérico con los números racionales, negativos, irracionales, etc. Pero el paso completamente natural después de los números reales, a saber, la introducción de los infinitesimales, ha sido simplemente omitido. Pienso que en los siglos venideros se considerará como algo sumamente extraño

en la historia de las matemáticas que la primera teoría exacta de los infinitesimales se desarrollase trescientos años después de la invención del cálculo diferencial. Me siento inclinado a creer que esta extraña circunstancia tiene algo que ver con otra extraña situación referente al mismo lapso de tiempo, a saber, el hecho de que problemas tales como el de Fermat, que pueden ser formulados en diez signos de aritmética elemental, todavía carecen de solución trescientos años después de haber sido planteados. Quizá la omisión mencionada sea en gran parte responsable del hecho de que, en comparación con el enorme desarrollo de las matemáticas abstractas, la solución de problemas numéricos complicados se ha quedado muy atrás.

BIBLIOGRAFIA

ACKERMANN, W.

[1928]. «Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke», *Mathematische Annalen*, 100, págs. 638-649.

[1928a]. «Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen», *Mathematische Annalen*, 99, págs. 118-133. (Trad. inglesa en Van Heijenoort (1967), págs. 493-507.)

[1951]. «Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse», *Mathematische Zeitschrift*, 53, págs. 403-413.

BACHMANN, M.

[1955]. *Transfinite Zahlen*. Springer Verlag. Berlin-Heildelberg.

BECKER, O.

[1930]. «Zur Logik der Modelitäten», *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, vol. 11, págs. 497-548.

BENACERRAF, P., y PUTNAM, M.

[1964]. *Philosophy of Mathematics. Selected readings*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey.

BERKA, K., y KREISER, L.

[1971]. *Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*. Akademie-Verlag. Berlin.

BERNAYS, P.

[1937-43]. «A System of axiomatic set theory», *The Journal of Symbolic Logic*, 2 (1937), págs. 65-77; 6 (1941), págs. 1-17; 7 (1942), págs. 65-89 y 133-145; 8 (1943), págs. 89-106.

[1926]. «Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der *Principia Mathematica*», *Mathematische Zeitschrift*, 25, págs. 305-320.

[1935]. «Sur le platonisme dans les mathématiques», *L'Enseignement mathématique*, 34, págs. 52-69.

[1954]. «Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung», *Revue internationale de Philosophie*, 27-28, págs. 9-13.

[1961]. «Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre», en *Essays on the foundations of mathematics dedicated to A.A. Fraenkel on his seventieth anniversary* (ed. por Bar-Hillel). Magna Press. Jerusalem.

BERNAYS, P., y FRAENKEL, A.

[1958]. *Axiomatic Set Theory.* North Holland. P.C. Amsterdam.

BERNAYS, P., y SCHÖNFINKEL

[1928]. «Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik», *Mathematische Annalen*, 99, págs. 401-419.

BIANCHI, L.

[1918]. *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni.* Pisa.

BLUMENTHAL, L. M.

[1940]. «A paradox, a paradox, a most ingenious paradox», *American Mathematical Monthly*, 47, págs. 346-353.

BRAUN, S., y SIERPINSKI, W.

[1932]. «Sur quelques propositions équivalentes à l'hypothèse du continu», *Fundamenta Mathematicae*, 19, págs. 1-7.

BROUWER, L. E. J.

[1907]. *Over de grondslagen der Wiskunde.* Maas and van Suchtelen, Amsterdam y Leipzig; Noordhoff, Groningen.

[1908]. «Die möglichen Mächtigkeiten», *Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*, Roma, vol. 3, págs. 569-571.

CARNAP, R.

[1931]. «Die Logizistische Grundlegung der Mathematik», *Erkenntnis*, 2, págs. 91 y ss. (Trad. inglesa en Benacerraf y Putnam (1964), págs. 31-41.)

[1934]. *Logische Syntax der Sprache.* Springer-Verlag. Wien.

[1934a]. «Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik», *Monastshefte für Mathematik und Physik*, 41, págs. 263-284.
[1937]. *The Logical Syntax of Language* (Trad. al inglés ampliada de Carnap [1934]). Kegan Paul. London.

COHEN, P. J.
[1963-64]. The independence of the Continuum Hypothesis *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50 (1963), págs. 1.143-1.148; 51 (1964), págs. 105-110.
[1966]. *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* W. A. Benjamin Inc. Amsterdam-New York.

CHUAQUI, R.
[1983]. Review of Kurt Gödel, *Obras completas. The Journal of Symbolic Logic*, 48, págs. 1199-1201.

CHURCH, A.
[1932-33]. «A Set of postulates for the foundation of logic», *Annals of Mathematics*, vol. 33, págs. 346 y ss., y vol. 34, págs. 834 y ss.
[1936]. «A note on the Entscheidungsproblem», *The Journal of Symbolic Logic*, 1, págs. 40-41 (Reimpreso en Davis [1965], págs. 110-115).
[1936a]. «An unsolvable problem of elementary number theory», *American Journal of Mathematics*, vol. 58, págs. 345-363 (Reimpreso en Davis (1965), págs. 89-107).

CHWISTEK, L.
[1932-33]. «Die Nominalistische Grundlegung der Mathematik», *Erkenntnis*, 3.

DAVIS, M.
[1965]. *The Undecidable. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions.* Raven Press. Hewlett. New York.

DAWSON, J. W., Jr.
[1983]. «The published work of Kurt Gödel: an annotated bibliography», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24, págs. 255-284:
[1984]. «Kurt Gödel in sharper focus», *The Mathematical Intelligencer*, 6, 4. (Reimpreso en Shanker [1988], págs. 1-16.)
[1985]. «The reception of Gödel's incompleteness theorems», *Philosophy of Science Association*, 2. (Reimpreso en Shanker [1988], págs. 74-95.)

DEKKER, J.
[1962]. (ed.) *Recursive function theory.* Proceedings of symposia in pure mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, R. I.

EASTON, W. B.
[1964]. «Powers of regular cardinals», *Notices of the American Mathematical Society*, 11, págs. 205 y ss. Doctoral dissertation, Princeton.

ERRERA, A.
[1952]. *Atti Acad. Ligure*, 9, págs. 176-183.

FEFERMAN, S.
[1984]. «Kurt Gödel, conviction and caution». *Philosophia naturalis*, 21, págs. 546-562. (Reimpreso en Shanker [1988], págs. 96-114.)

FRAENKEL, A. A.
[1925], «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre», *Mathematische Zeitschrift*, 22, págs. 250-273.
[1927]. *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre.* Teubner, Leipzig Berlin. Wiss. u. Hyp. 31.

FRAENKEL, A. A., y BAR-HILLEL, Y.
[1958]. *Foundations of set Theory.* North Holland. P.C. Amsterdam.

FREGE, G.
[1892]. «Sinn und Bedeutung», *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 100, págs. 25-50 (Trad. castellana en Frege [1971], págs. 49-84).
(1971). *Estudios sobre semántica.* Ed. Ariel, Barcelona.

GLIVENKO, V. I.
[1929]. «Sur quelques points de la logique de M. Brouwer», *Academie Royale de Belgique, Bulletin de la classe de Sciences.* Serie 5, vol. 15, págs. 183-188.

GENTZEN, G.
[1936]. «Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie», *Mathematische Annalen*, vol. 112, págs. 493-565.

GÖDEL, K.
[1929]. *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls* (tesis doctoral presentada en la Universidad de Viena, reimpresa en alemán y traducida al inglés en Gödel [1986], págs. 60-101).
[1930]. «Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls», *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, págs. 349-360. (Reimpreso en Berka y Kreiser [1971], págs. 283-294, y en Gödel [1986], págs. 102-122.)

[1930a]. «Über die Vollständigkeit des Logikkalküls», *Die Naturwissenschaften*, 18, pág. 1068.

[1930b]. «Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit», *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, 67, págs. 214-215. (Reimpreso en Berka y Kreiser [1971], pág. 320-321, y en Gödel [1986], págs. 140-142.)

[1931]. «Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme. I», *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, págs. 173-198. (Reimpreso en Gödel [1986], págs. 144-194.)

[1931a]. Diskussion zur Grundlegung der Mathematik, *Erkenntnis*, 2, págs. 147-151.

[1932]. «Zum intuitionistischen Aussagenkalkül», *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematischen-naturwissenschaftliche Klasse*, 69. (Reimpreso en Berka y Kreiser [1971], pág. 186, y en Gödel [1986], págs. 222-224.)

[1932a]. «Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 2, págs. 27-28).

[1932b]. «Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 3, págs. 12-13).

[1932c]. «Eine Eigenschaft der Realisierungen des Aussagenkalküls», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 3, págs. 20-21.

[1933]. Über die Parryschen Axiome. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, pág. 6.

[1933a]. «Über Unabhängigkeitsbeweise im Aussagenkalkül», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, págs. 9-10.

[1933b]. «Über die metrische Einbettbarkeit der Quadrupel des $\mathbb{R}^3$ in Kugelflächen», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, págs. 16-17.

[1933c], «Über die Waldsche Axiomatik des Zwischenbegriffes», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, págs. 17-18.

[1933d]. «Zur Axiomatik der elementargeometrischen Verknüpfungsrelationen», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, pág. 34.

[1933e]. «Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, págs. 34-38.

[1933f]. «Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, págs. 39-40. (Reimpreso en Berka y Kreiser [1971], págs. 187-188, y en Gödel [1986], págs. 300-302.)

[1933g]. «Bemerkung über projektive Abbildungen», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 5, pág. 1.

[1933h]. (Junto con K. Menger y A. Wald) «Diskussion über koordina-

tenlose Differentialgeometrie», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 5, págs. 25-26.

[1933i]. «Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls», *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 40, págs. 433-443.

[1934]. *On undecidable propositions of formal mathematical systems* (apuntes tomados por S. Kleene y B. Rosser y multicopiados). Institute for Advance Study. Princeton, N. J. (Reimpresión corregida en Davis [1965], págs. 39-74.)

[1936]. Diskussionsbemerkung, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 7, pág. 6.

[1936a]. «Über die Länge von Beweisen», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 7, págs. 23-24.

[1938]. «The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, 24, págs. 556-557.

[1939]. «The consistency of the generalized continuum-hypothesis» (abstract), *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45, pág. 93.

[1939a]. «Consistency proof for the generalized continuum hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, 25, págs. 220-224.

[1940]. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory.* Annals of mathematics studies, 3. Princeton University Press. Princeton. (Reimpreso con notas adicionales en 1951 y 1966.)

[1944]. «Russell's mathematical logic», en Schilpp [1944], págs. 123-153. (Reimpreso en Benacerraf y Putnam [1964], págs. 211-232.)

[1946]. Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics. Princeton. (Publicado en Davis [1965], págs. 84-88.)

[1947]. «What is Cantor's continuum problem?», *American mathematical monthly*, 54, págs. 515-525. (Reimpreso en Benacerraf y Putnam [1964], págs. 258-269.

[1949]. «An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation», *Reviews of modern physics*, 21, págs. 447-450.

[1949a]. «A remark about the relationship between relativity theory and idealistic philosophy», en Schilpp [1949], págs. 555-562.

[1952]. «Rotating universes in general relativity theory», *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., U.S.A.*, 1950. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1952, I, págs. 175-181.

[1958]. «Über eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes», *Dialectica*, 12, págs. 280-287.

[1962]. Postscript to Spector [1962]. En Dekker [1962], pág. 27.
[1964]. Supplement to the second edition of Gödel [1947], en Benacerraf y Putnam [1964], págs. 269-273.
[1972]. «On an extension of finitary mathematics which has not yet been used» (traducción inglesa revisada y ampliada de [Gödel 1958], enviada a la revista *Dialectica*).
[1972a]. «Some remarks on the undecidability results» (enviado a la revista *Dialectica*).
[1974]. On non standard analysis. En A. Robinson [1974], pág. X.
[1986]. *Collected Works* (editado por S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., S. Kleene, G. Moore, R. Solovay y J. van Heijenoort). *Volume I: Publications* 1929-1936. Oxford University Press. New York, Oxford.
[1990]. *Collected Works. Volume II: Publications 1938-1974*. Oxford University Press. New York, Oxford.

GOLDFARB, W. D.
[1980]. «On the Gödel class with identity», *Journal of Symbolic Logic*, 45.

GONSETH, F.
[1941]. *Les entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6-9 décembre* 1938. Leemann, Zürich.

GRATTON-GUINNESS, I.
[1979]. «In memoriam: Kurt Gödel». *Historia Mathematica*, 6, págs. 294-304.

HAJNAL, A.
[1956]. «On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem», *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, II, págs. 131-136.

HANF, W. P., y SCOTT, D.
[1961]. «Classifying inaccesible cardinals», *Notices American Mathematical Society*, 8, pág. 445.

HAUSDORFF, F.
[1914]. *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit. Leipzig (Reimpreso en 1949 en Chelsea, New York).
[1935]. *Mengenlehre* (3.ª ed. de Hausdorff [1914]). Veit. Leipzig (Reimpreso en 1944 por Dover, New York).

HERBRAND, J.
[1930]. *Recherches sur la théorie de la démonstration*. Tesis doctoral presentada a la Facultad de Ciencias de la Universidad de París (Trad. al inglés parcialmente en van Heijenoort [1965], págs. 525-581).

[1930a]. «Les bases de la logique hilbertienne», *Revue de métaphysique et de morale*, 37, págs. 243-255.

[1931]. «Sur la non-contradiction de l'arithmétique», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 166, págs. 1-8 (Trad. al inglés en van Heijenoort [1967], págs. 618-628).

HEYTING, A.

[1930]. «Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse II*, págs. 42-56.

[1930a]. «Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften.* Physikalisch-Mathematische Klasse II, págs. 57-71, 158-169.

[1956]. *Intuitionism.* North-Holland Publishing Co. Amsterdam.

HILBERT, D.

[1925]. «Über das Unendliche», *Mathematische Annalen*, 95, págs. 161-190 (Trad. al inglés en van Heijenoort [1967], págs. 367-392).

HILBERT, D., y ACKERMANN, W.

[1928]. *Grundzüge der theoretischen Logik.* Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg.

HILBERT, D., y BERNAYS. P.

[1934]. *Grundlagen der Mathematik*, vol. I. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg.

[1939]. *Grundlagen der Mathematik*, vol. II. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg.

HINATA, S.

[1967]. «Calculability of primitive recursive functionals of finite type», *Science reports of the Tokyo Kyoikn Daigakn*, 9, págs. 218-235.

HOWARD, W. A.

[1970]. «Assignement of ordinals to terms for primitive recursive functionals of finite type», en *Intuitionism and Proof Theory* (North-Holland, Amsterdam), págs. 443-458.

HUBBLE, E.

[1934]. «The distribution of extra-galactic nebulae». *The Astrophysical Journal*, 79, págs. 8-76.

HUREWICZ, W.

[1932]. «Une remarque sur l'hypothèse du continu», *Fundamenta Mathematicae*, 19, págs. 8-9.

JEANS, J.
[1935]. *Man and the universe.* Sir Halley Stewart Lecture.

JOHANSSON
[1936]. «Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus». *Compositio Mathematicae,* 4, págs. 119-136.

KALMAR, L.
[1932]. «Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten», *Mathematische Annalen,* 108.
[1936]. «Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen», *Compositio Mathematica,* 4.
[1955]. «Über ein Problem, betreffend die Definition des Begriffes der allgemein-rekursiven Funktionen», *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen des Mathematik,* 1, págs. 93-96.

KANT, I.
[1787]. *Kritik der reinen Vernunft* (2.ª e.). Riga.

KEISLER, H. J., y TARSKI, A.
[1964]. «From accesible to inaccesible cardinals», *Fundamenta Mathematicae,* 53, págs. 225-308.

KLEENE, S. C.
[1936]. «General recursive functions of natural numbers», *Mathematische Annalen,* 112, págs. 727-742. (Reimpreso en Davis [1965], págs. 237-253).
[1952]. *Introduction to Metamathematics.* North Holland P.C. Amsterdam.
[1960]. «Realizability and Shanin's algorithm for the constructive deciphering of mathematical sentences». *Logique et Analyse. Nouvelle série,* 3, págs. 154-165.
[1974]. *Introducción a la Metamatemática* (Trad. castellana de Kleene [1952]). Ed. Tecnos. Madrid.
[1976]. «The work of Kurt Gödel», *The Journal of Symbolic Logic,* 41, págs. 761-778.
[1978]. «An addendum», *The Journal of Symbolic Logic,* 43, pág. 613.

KLEENE, S.C., y ROSSER, J.B.
[1935]. «The inconsistency of certain formal logics», *Annals of Mathematics,* vol. 36, págs. 630.

KOLMOGOROV, A. N.
[1925]. «O printsipe tertium non datur», *Mam. cb.*, vol. 32, págs. 646-667. En ruso (Trad. inglesa en van Heijenoort [1967], págs. 416-437).
[1932]. «Zur Deutung der intuitionistische Logic», *Mathematische Zeitschrift*, 35, págs. 58-65.

KÖNIG, J.
[1904]. «Zum Kontinuum-Problem», *Mathematische Annalen*, 60, págs. 177-180.

KREISEL, G.
[1958]. «Hilbert's programme», *Dialectica*, 12, págs. 346-372. (Reimpreso en Benacerraf y Putnam [1964], págs. 157-180.)
[1960]. «Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (ed. por J. Todd), II, 8, págs. 289-299. Cambridge University Press, Cambridge.
[1965]. «Mathematical Logic». *Lectures on Modern Mathematics* (ed. por T. Saatly), vol. 3, págs. 95-195. Wiley and Sons. New York.
[1968]. «A survey of proof theory». *The Journal of Symbolic Logic*, 33, págs. 321-388.
[1980]. «Kurt Gödel, 28 April 1906 - 14 January 1978», *Biographical memoirs of Fellows of the Royal Society*, 26, págs. 148-224.

KURATOWSKI, K.
[1933]. *Topologia*, I. Monogr. Mat. T. III. Varszawa y Lwow.
[1948]. «Ensembles projectifs et ensembles singuliers», *Fundamenta Mathematicae*, 35, págs. 131-140.
[1949]. «Quelques genéralisations des théorèmes sur les coupures du plan», *Fundamenta Mathematicae*, 36, págs. 277-282.
[1951]. «Sur une caractérisation des alephs», *Fundamenta Mathematicae*, 38, págs. 14-17.

LANGFORD, C. H.
[1927]. «On inductive relations», *Bulletin American Mathematical Sociey*, vol. 33, págs. 599-607.

LEIBNIZ, G. W.
[1875-90]. *Philosophischen Schriften* (ed. por C. J. Gerhardt). Berlin.
[1923 y ss.]. *Sämtliche Schriften und Briefe* (ed. por la Preussischen Akademie der Wissenschaften). Berlín.

LEVY, A.
[1960]. «Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory», *Pacific Journal of Mathematics*, 10, págs. 223-238.
[1960a]. «Principles of reflection in axiomatic set theory», *Fundamenta Mathematicae*, 49, pág. 1.

LEWIS, C.I., y LANGFORD, C.H.
[1932]. *Symbolic Logic*. New York (Reimpreso en 1959).

LORENZEN, P.
[1951]. «Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände». *The Journal of Symbolic Logic*, 16, págs. 81-106.

LÖWENHEIM, L.
[1915]. «Über Möglichkeiten im Relativkalkül», *Mathematische Annalen*, 76, págs. 447-470 (Trad. inglesa en van Heijenoort [1967], págs. 228-251).

LUKASIEWICZ, J., y TARSKI, A.
[1930]. «Untersuchungen über den Aussagenkalkül», *Comptes rendus des séances de la Sociéte des Sciences et des lettres de Varsovie*, 23, Cl III, págs. 30-50 (Trad. al inglés en Tarski [1956], págs. 38-59).

LUSIN, N.N.
[1914]. «Sur un problème de M. Baire», *Comptes Rendus. Académie Sciences*, págs. 1.258-1.261. París, 158.
[1930]. *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*. Gauthier-Villars. París.
[1935]. «Sur les ensembles analytiques nuls», *Fundamenta Mathematicae*, 25, págs. 109-131.

LUSIN, N.N., y SIERPINSKI, W.
[1918]. «Sur quelques propiétés des ensembles (A)», *Bulletin international de l'Académie des sciences de Cracovie, Classe des sciences mathématiques et naturelles, serie A: sciences mathématiques*, abril-mayo, págs. 35-48.

MAC LANE, S.
[1959]. «Locally small categories and the foundations of set theory», *Symp. on Foundations of Mathematics*. Warsaw, 1961, págs. 25-43.

MC TAGGART, J M. E.
[1908]. «The Unreality of Time», *Mind*, 17.

MAHLO, P.
[1911]. «Über lineare transfinite Mengen», *Berichte über die Verhandlun-*

gen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physikalische Klasse, 63, 187-225.
[1913]. «Zur Theorie und Anwendung der ρ_0-Zahlen. II», *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physikalische Klasse*, 65, págs. 268-282.

MENGER, K.
[1930]. «Untersuchungen über allgemeine Metrik. Vierte Untersuchung. Zur Metrik der Kurven», *Mathematische Annalen*, 103, págs. 466-501.
[1932]. «Probleme der allgemeinen metrischen Geometrie», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 2, págs. 20-22.

MIRIMANOFF, D.
[1917]. «Les antinomies de Russell et de Bulaliforte et le problème fondamental de la théorie des ensembles», *L'Enseignement mathematique*, vol. 19, págs. 37-52.
[1917-20]. «Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies Cantoriennes», *L'Enseignement Mathematique*, vol. 19 (1917), págs. 209-217, y vol. 21 (1920), págs. 29-52.

MONGRE, P.
[1898]. *Das Chaos in kosmischer Auslese.*

NAGEL, E., y NEWMAN, J. R.
[1958]. *Gödel's Proof.* New York Univ. Press. New York.
[1959]. *La prueba de Gödel.* (Trad. castellana de Nagel y Newman [1958]). U.N.A.M. México.

NEUMANN, J. von
[1925]. «Eine Axiomatisierung der Mengenlehre», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 154, págs. 219-240 (Trad. al inglés en van Heijenoort [1967], págs. 393-413) (Reimpreso en von Neumann [1961], págs. 34-56).
[1927]. «Zur Hilbertschen Beweistheorie», *Mathematische Zeitschrift*, 26, págs. 1-46 (Reimpreso en von Neumann [1961], págs. 256-300).
[1928]. «Die Axiomatisierung der Mengenlehre», *Mathematische Zeitschrift*, 27, págs. 669-782 (Reimpreso en von Neumann [1961], págs. 339-422).
[1929]. «Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 160, págs. 227-241 (Reimpreso en Neumann [1961], págs. 494-508).
[1961]. *Collected Works*, vol. 1. Pergamon Press. New York.

PARRY, W.
[1933]. «Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation (analytische Implikation)», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, págs. 5-6.

PARRY, W. T.
[1933]. «Zum Lewisschen Aussagenkalkül», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4, págs. 15-16.

POST, E. L.
[1936]. «Finite combinatory processes, formulation I», *The Journal of Symbolic Logic*, 1, págs. 103-105 (Reimpreso en Davis [1965], págs. 288-291).

PRESBURGER, M.
[1929]. «Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervorttrit», *Sprazwozdanie z I Kongresu Matematyków Krajów Slowiánskich*, Warszawa, págs. 92-101.

QUINE, W. v. O.
[1937]. «New Foundations for Mathematical Logic», *American Mathematical Monthly*, vol. 44, pág. 70 (Trad. al castellano en Quine [1962], págs. 125-134).
[1953]. *From a logical point of view*. Cambridge. Massachusetts.
[1962]. *Desde un punto de vista lógico* (Trad. castellana de Quine [1953]). Ed. Ariel, Barcelona.

RAMSEY, F. P.
[1926]. «The foundations of Mathematics», *Proceedings of the London Mathematical Society*, serie 2, vol. 25, págs. 338-384 (Reimpreso en Ramsey [1931]).
[1931]. *The foundations of mathematics and other logical essays*. Ed. por Richard Beran Braithwaite (Paul, Trench, Trubner, London; Harcourt, Brace, New York).

ROBERTSON, H. P.
[1933]. «Relativistic Cosmology», *Reviews of Modern Physics*, 5, págs. 62-90.

ROBINSON, A.
[1974]. *Non-standard Analysis* (2.ª edición). North-Holland Publishing Co. Amsterdam.

ROBINSON, R. M.
[1937]. «The Theory of classes, a modification of von Neumann's system», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 2, págs. 29-36.

ROSSER, J. B.
[1936]. «Extensions of Some Theorems of Gödel and Church», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 1 (Reimpreso en Davis [1965], págs. 231-235).

RUSSELL, B.
[1906]. «On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Orders Types», *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2.ª serie, vol. 4, págs. 29-53.
[1906a]. «Les paradoxes de la logique», *Revue de Metaphysique et de Morale*, 14, págs. 627-650.
[1920]. *An Introduction to Mathematical Philosophy*. Allen and Unwin. London.
[1940]. *An Inquiry into meaning and truth*. W. W. Norton and Company. New York.

SCOTT, D.
[1961]. «Measurable Cardinals and Constructible Sets», *Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. et Phys.*, 7, págs. 145-149.
[1961a]. «Measurable Cardinals and Constructible Sets», *Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. et Phys.*, 9, págs. 521-524.

SCHILPP, P.
[1944]. (ed.) *The Philosophy of Bertrand Russell*. Library of Living Philosophers, 5. Evanston.

SCHÜTTE, K.
[1934]. «Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik», *Mathematische Annalen*, 109, págs. 572-603.
[1954]. «Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen». *Mathematische Annalen*, 127, págs. 15-32.
[1968]. *Vollständige Systeme modeler und intuitionisticher Logik*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg.

SHANKER, S. G.
[1988]. (ed.) *Gödel's theorem in focus*. Croom Helm. London.

SIERPINSKI, W.
[1934]. *Hypothèse do Continu*. Warszawa-Lwow.
[1934a]. «Sur une extension de la notion de l'homéomorphie», *Fundamenta Mathematicae*, 22, págs. 270-275.
[1935]. «Sur une hypothèse de M. Lusin», *Fundamenta Mathematicae*, 25, págs. 132-135.
[1935a]. *Ann. Scuol. Norm. Sup.* Pisa 4, pág. 43.

[1951]. «Sur quelques propositions concernant la puissance du continu», *Fundamenta Mathematicae*, 38, págs. 1-13.
[1956]. *Hypothèse du continu*, 2.ª ed. New York.

SIERPINSKI, W., y TARSKI, A.
[1930]. «Sur una propieté caractéristique des nombres inaccesibles», *Fundamenta Mathematicae*, 15, págs. 292-300.

SIKORSKI, R.
[1951]. «A characterisation of alephs», *Fundamenta Mathematicae*, 38, págs. 18-22.

SKOLEM, Th.
[1920]. «Logisch-Kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen», *Videnskapsselskapets skrifter, I, Mathematisk-naturwidenskabeling Klasse*, 4, págs. 1-36 (Trad. inglesa en van Heijenoort [1967], págs. 252-263).
[1930]. «Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik», *Videnskasselskapets Skrifter, Mathematisk-naturwidenskabeling Klasse*, 7.
[1933]. «Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems», *Norsk matematisk forenings skrifter*, ser. II, n. 10, págs. 73-82.

SOLOVAY, R. M.
[1936]. «Independence Results in the Theory of Cardinals, I, II, Preliminary Report», *Am. Math. Soc. Notices*, 10.

SPECTOR, C.
[1962]. «Provably recursive functionals of analysis: A consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics», en Dekker [1962], págs. 1-27.

TAIT, W. W.
[1967]. «Intensional interpretations of functionals of finite type», *The Journal of Symbolic Logic*, 32, págs. 198-212.

TAKEUTI, G.
[1957]. «Ordinal diagrams». *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 9, págs. 386-394.
[1960]. «Ordinal diagrams II». *Kournal of the Mathematical Society of Japan*, 12, págs. 385-391.
[1967]. «Consistency proofs of subsystems of classical...

TARSKI, A.

[1925]. «Quelques théorèmes sur les alephs», *Fundamenta Mathematicae*, 7, págs. 1-14.

[1933]. «Projecie prawdy w jezykach nauk dedukcyjnych», *Prace Towarszystwa Naukowejo Warszawskiego*. Wydzial III. 34, págs. VII +116.

[1933a]. «Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchfrei heit und der ω-Vollständigkeit», *Monatshefte Math. Phys.*, 40, págs. 97-112.

[1936]. «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen» (Trad. al alemán de Tarski [1933] con un nuevo epílogo). *Studia Philosophica*, 1, págs. 261-405.

[1938]. «Über unerreichbare Kardinalzahlen», *Fundamenta Mathematicae*, 30, págs. 68-69.

[1944]. «The semantic conception of truth and the foundations of semantics», *Phylosophy and Phenomenological Research*, vol. 4, 3, págs. 341-376.

[1953]. *Undecidable Theories*. North-Holland, Amsterdam.

[1956]. *Logic, Semantics, Metamathematics Papers from* 1923 *to* 1938 (Trad. al inglés de Tarski [1936] y otros artículos por J. H. Woodger). Clarendon Press. Oxford.

[1960]. «Some problems and results relevant to the foundations of set theory», en *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (ed. por E. Nagel, P. Suppes y A. Tarski). Stanford Univ. Press. California 1962, págs. 125-135.

TROELSTRA, A. S.

[1977]. «Aspects of constructive mathematics», en *Handbook of Mathematical Logic*, págs. 973-1.052. North-Holland, Amsterdam.

TURING, A. M.

[1937]. «On computable numbers, with an aplication to the Entscheidungsproblem», *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2.ª serie, 42, págs. 230-265 (Reimpreso en Davis [1965], págs. 116-154).

VACCA, G.

[1902-06]. «La lógica di Leibniz», *Riv, di Mat.*, vol. 8, pág. 72.

VAN HEIJENOORT, J.

[1967] (ed.). *From Frege to Gödel. A source book in Mathematical Logic.* 1879-1931. Harvard University Press. Cambridge. Massachusetts (3.ª ed. corregida 1977).

WALD, A.

[1931]. «Axiomatik des Zwischenbegriffes in metrischen Räumen», *Mathematische Annalen*, 104, págs. 476-484.

[1932]. «Axiomatik des metrischen Zwischenbegriffes», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 2, págs. 17-18.

[1936]. «Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre (II. Mitteilung)», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 7, págs. 1-6.

WANG, H.

[1974]. *From Mathematics to Philosophy*. Routledge & Kegan Paul. London.

[1981]. «Some facts about Kurt Gödel», *The Journal of Symbolic Logic*, 46, págs. 653-659.

[1987]. *Reflections on Kurt Gödel*. The M.I.T. Press. Cambridge (Mass.).

WERNICK, G.

[1929]. «Die Unabhängigkeit des zweiten distributiven Gesetzes von den übrigen Axiomen der Logistik», *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 161, págs. 123-134.

WEYL, H.

[1932]. *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, 2.ª ed. de Gruyter. Berlin y Leipzig.

WHITEHEAD, A. N., y RUSSELL, B.

[1910-13]. *Principia Mathematica*. Cambridge Univ. Press. Cambridge (2.ª ed. 1925-1927).

ZERMELO, E.

[1908]. «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I», *Mathematische Annalen*, 65, págs. 261-281 (Trad. inglesa en van Heijenoort [1967], págs. 199-215).

[1930]. «Über Grenzzahlen und Mengenbereiche», *Fundamenta Mathematicae*, 16, págs. 29-47.

Kurt Gödel

OBRAS COMPLETAS



La casi mítica fama de Kurt Gödel entre lógicos, matemáticos y filósofos descansa en tres logros de importancia excepcional: en 1930 probó la suficiencia del cálculo lógico de primer orden; en 1931 demostró que todo sistema formal que contenga un poco de aritmética es necesariamente incompleto y que es imposible probar su consistencia con sus propios medios; y en 1938-1939 probó la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis del continuo respecto de los demás axiomas de la teoría de conjuntos. Pero sus artículos y trabajos, de una concisión legendaria y de una incomparable densidad intelectual, no siempre resultan fáciles de consultar, pues se encuentran desperdigados en publicaciones, actas y revistas de varios países. Estas *Obras completas* reúnen la totalidad de los escritos de Gödel hasta ahora publicados. Ordenados cronológicamente, cada uno de ellos va precedido de una breve introducción de Jesús Mosterín, que los sitúa en su contexto más general y a veces los resume someramente.

Alianza Editorial

ISBN: 84-206-4773-X

